# ESD 2008 – 0702 : Loi exponentielle

Auteur du corrigé : Gilbert Julia **TI-Nspire™ CAS**

***Avertissement*** *: ce document a été réalisé avec la version 1.4 de TI-Nspire.*

**Fichier associé :** esd2008_0702.tns

## 1. Le sujet

### L'exercice proposé au candidat

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un téléviseur avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité $p$ de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Ainsi la probabilité d'un intervalle $[0\,;t[$, notée $P([0\,;t[)$ est la probabilité que le téléviseur tombe en panne avant $t$ années. Cette loi est la loi exponentielle de paramètre $\lambda$ où $\lambda$ est un réel strictement positif.

**1)** Déterminer, en fonction de $\lambda$, la valeur de $t$ pour laquelle on a $P([0\,;t[) = P([t\,;+\infty[)$.
**2)** D'après l'étude statistique effectuée par le constructeur, la probabilité que le téléviseur tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. Calculer la valeur exacte de $\lambda$.

Dans la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0{,}2$.

**3)** Montrer qu'une valeur approchée de la probabilité que le téléviseur n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à $10^{-4}$ près, est : 0,5488.

**4)** Sachant que ce téléviseur n'a connu aucune panne au cours des 10 premières années après sa mise en service, quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne au cours des 13 premières années ?

**5)** Dix téléviseurs neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par $X$ la variable aléatoire égale au nombre de téléviseurs qui n'ont pas eu de panne au cours des trois premières années. Calculer une valeur approchée de la probabilité de l'événement « $X = 4$ » arrondie à $10^{-4}$ près.

### Le travail demandé au candidat

**Q1)** Rédiger une réponse pour chacune des questions **3** et **4** de l'exercice.

**Q2)** Commenter l'expression « loi de durée de vie sans vieillissement ».

**Q3)** Un ou plusieurs exercices sur le thème « **Probabilités** ».

## 2. Eléments de correction

### a. Analyse de l'exercice

L'exercice proposé porte sur un exemple de phénomène modélisé par une loi exponentielle. La question **1** porte sur la notion de demi-vie, tandis que la question **2** propose une estimation du paramètre $\lambda$ de la loi exponentielle à partir de la donnée de la probabilité que $X$ appartienne à $[0\,;1]$.

Les élèves doivent connaître la densité d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda$, la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(t) = \lambda.\mathrm{e}^{-\lambda.t}$. Ils doivent savoir calculer la probabilité que $X$ appartienne à un intervalle donné inclus dans $\mathbb{R}^+$ : $P([a\,;b]) = \mathrm{e}^{-\lambda.a} - \mathrm{e}^{-\lambda.b}$. La question **3** exploite ce dernier résultat.
La question **5** est une question à part, portant sur une loi binomiale.
L'exercice peut servir à une évaluation de Terminale S.

Si on l'ampute de la question **5**, il devient un exercice qui peut être posé pour mettre en valeur la notion de non vieillissement. Il convient alors de *ne pas donner* dans l'énoncé le résultat de la question **3**.

### b. Corrigé de la question 3

On peut proposer deux méthodes qui ne donnent pas tout à fait le même résultat numérique :

*Première méthode* (celle qui est attendue) :
La loi exponentielle de paramètre 0,2 à pour densité la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(t) = 0{,}2.\mathrm{e}^{-0{,}2.t}$. Par conséquent : $P([0\ ;\ 3]) = \int_0^3 0{,}2.\mathrm{e}^{-0{,}2.t}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 0{,}4512$. Il en résulte que la probabilité que le téléviseur n'ait pas de panne au cours des 3 premières années (évènement contraire) est : $P(]3 ; +\infty[) = \mathrm{e}^{-0{,}6} \approx 0{,}5488$.

*Deuxième méthode* (exploitant la propriété de non vieillissement) :
Puisque la loi suivie est sans vieillissement, la probabilité que le téléviseur ait une panne une année donnée est 0,18 et cela indépendamment des autres années. La probabilité qu'il n'y ait pas de panne au cours d'une année donnée est donc 0,82, cela indépendamment des autres années. Par conséquent, la probabilité qu'il n'y ait aucune panne au cours des 3 premières années est $0{,}82^3 = 0{,}551368$. L'arrondi à $10^{-4}$ près est 0,5514.

L'écart entre les résultats des deux méthodes provient du fait que la valeur de $\lambda$ qui est $-\ln(0{,}82)$ a été arrondie à $10^{-2}$ près. La décision de donner 0,5488 dans l'énoncé (motivée par le caractère évaluatif de l'exercice) est pour le moins discutable puisqu'elle présume de la méthode choisie. De plus, l'arrondi demandé, à $10^{-4}$ près, n'est pas cohérent avec la qualité moindre de l'arrondi utilisé dans l'énoncé sur la valeur de $\lambda$.

## 3. Apport de la TI-Nspire

### a. Apports proposés

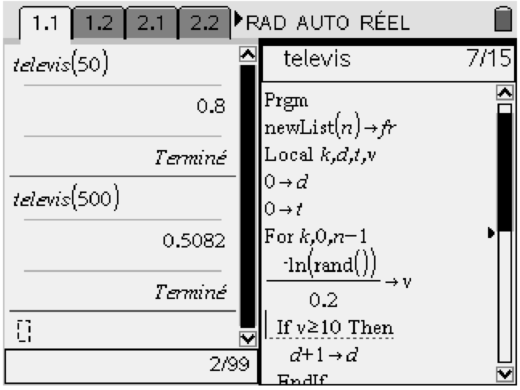
- Étude de la question **4** à l'aide d'un programme.
- Étude de la question **4** à l'aide du tableur.

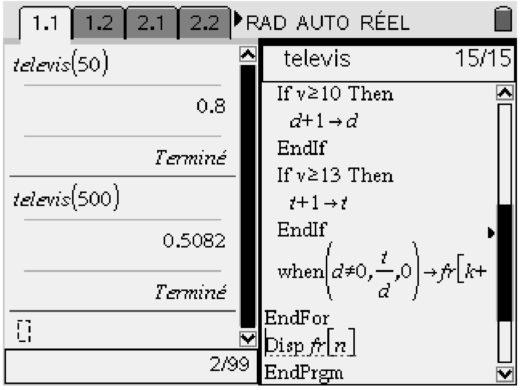
Dans les deux cas, cet apport peut servir à provoquer une conjecture. En simulant le test d'un échantillon de téléviseurs, il sera question de déterminer la proportion de téléviseurs de 13 ans parmi ceux qui ont atteint 10 ans. Peut-on conjecturer que le résultat trouvé découle d'une fluctuation autour de 0,5488 ?

### b. Investigation à l'aide d'un programme

L'idée du programme **televis** (*n*) dans une page **Calculs** est de simuler un nombre *n* de durées de vies *v* de téléviseurs, suivant la loi exponentielle de paramètre 0,2.
→ Voir, à ce propos, le manuel en ligne "TI-Nspire CAS au CAPES", chapitre 14 « simulation », paragraphe 8, page 20 : www.univers-ti-nspire.fr/files/pdf/TI-Nspire_chap14_capes.pdf .

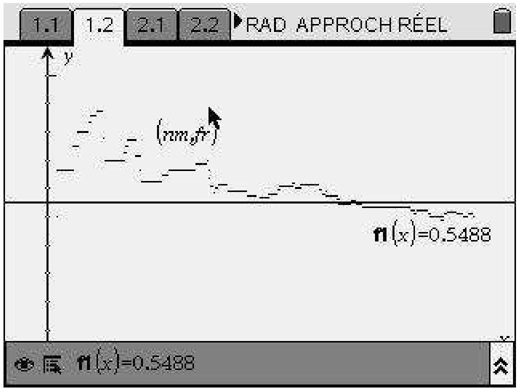
Si $v \geq 10$, alors le nombre *d* de téléviseurs en état de marche au bout de dix ans est augmenté de 1.
Si $v \geq 13$, alors le nombre *t* de téléviseurs en état de marche au bout de treize ans est augmenté de 1.
Le calcul de *t/d* permet d'enregistrer en liste **fr** la fréquence des téléviseurs vieux de 13 ans parmi ceux qui ont atteint 10 ans. L'usage du contrôle « when » dans le programme sert à éliminer le calcul de *t/d* au cas où $d = 0$, ce qui peut arriver en tout début d'expérience, pour les premières valeurs de *k*. Le programme conserve la liste **fr** et renvoie, pour information, la dernière fréquence de la liste.
Sur la partie gauche des écrans de la page suivante, le programme est exécuté pour une valeur de *n* « petite » puis une autre « moyenne ». Dans le premier cas, le résultat obtenu n'a aucune signification, car il y a très peu de téléviseurs âgés de 10 ans qui sont testés. Le résultat est un peu plus significatif, sans être cependant décisif, dans le deuxième cas.




Après avoir lancé le programme pour une valeur plus élevée de $n$ (par exemple 1000) et défini une liste **nm** : $\text{seq}(i, i, 1, n) \rightarrow nm$ avec le même entier $n$, il est possible de représenter graphiquement, dans une page **Graphiques & géométrie**, le nuage des points (**nm**, **fr**).

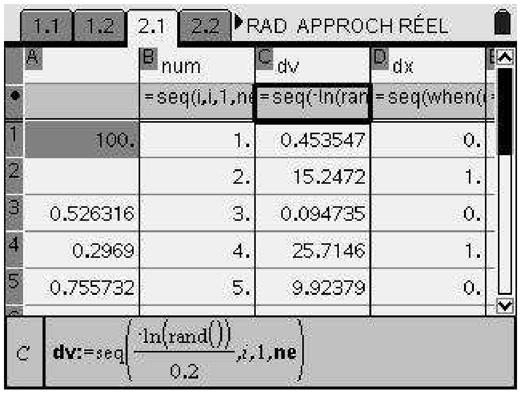
On remarque des paliers d'attente d'un téléviseur de plus de dix ans.



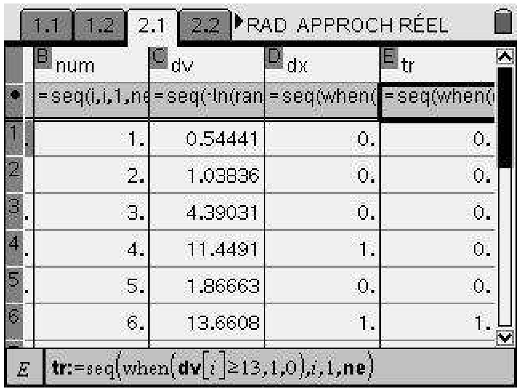

## c. Investigation à l'aide du tableur.

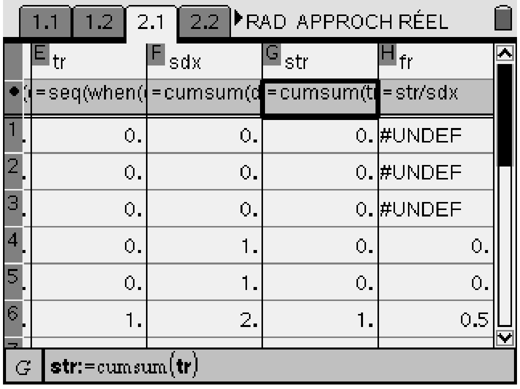
Ouvrir une nouvelle **Activité** et une page **Tableur & listes**.

La cellule A1 est réservée au nombre **ne** de téléviseurs testés.
La colonne B nommée **num** sert à numéroter les téléviseurs de 1 à **ne**.
La colonne C nommée **dv** est définie dans sa ligne d'édition par la formule $= \text{seq}\left(\dfrac{-\ln((\text{rand}())}{0.2}, i, 1, \textbf{ne}\right)$.
Elle simule **ne** durées de vie de téléviseurs.

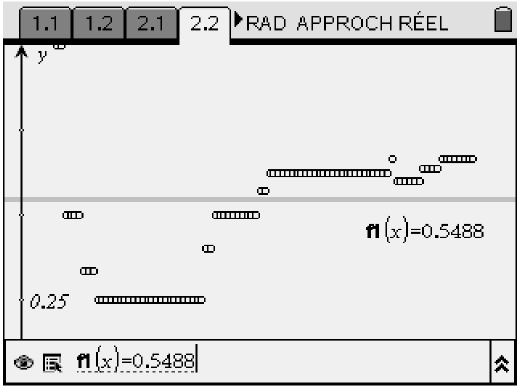



Les colonnes D et E, respectivement nommées **dx** et **tr**, sont indicatrices des téléviseurs qui atteignent 10 ans (respectivement 13 ans). Elles sont définies à l'aide du contrôle « when ».

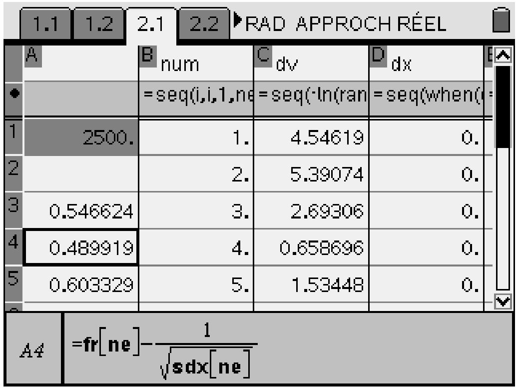




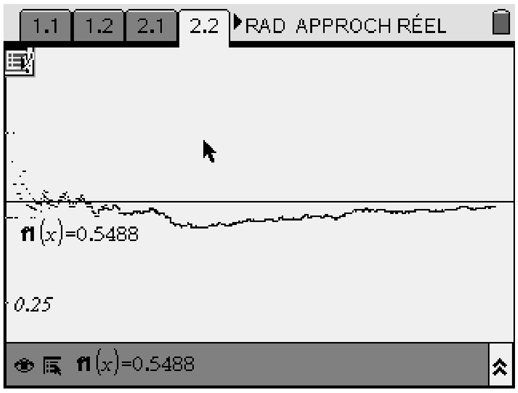

Les colonnes F et G nommées **sdx** et **str** comptabilisent les téléviseurs vieux de 10 ans (respectivement, 13 ans). La fréquence des téléviseurs vieux de 13 ans parmi ceux qui ont atteint 10 ans est calculée en colonne H nommée **fr** en faisant le quotient **str/sdx**. Ses premiers termes peuvent être non définis, les premiers termes de **sdx** étant nuls tant que le premier téléviseur atteignant 10 ans n'est pas apparu.




Avec une valeur de **ne** de l'ordre de 100, la fluctuation peut être très importante. Les plages d'attente d'un téléviseur atteignant 10 ans sont bien visibles. On ne peut rien en tirer de significatif.




La page est recalculée avec une valeur de **ne** plus élevée (on peut choisir jusqu'à 2500). En cellule A3, on a reporté la dernière fréquence obtenue, =**fr**[**ne**], et en cellule A4 et A5 les extrémités des intervalles de confiance qu'elle induit (le nombre de téléviseurs âgés de 10 ans ou plus étant non pas **ne** mais **sdx**[**ne**]). Il est plausible que la probabilité conditionnelle qu'un téléviseur atteigne 13 ans sachant qu'il a atteint 10 ans, soit la même que la probabilité qu'un téléviseur neuf atteigne 3 ans.



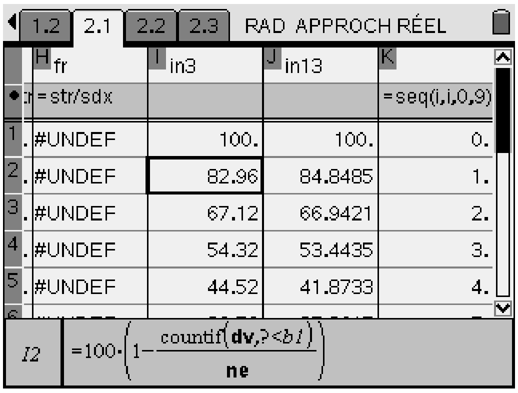

Une représentation graphique conforte cette conjecture.
(Pour autant, le fait que la probabilité conditionnelle en question *est égale* à 0 ,5488 n'est bien sûr pas démontré. Il est seulement plausible).

Il reste encore à démontrer la conjecture en appliquant d'abord la définition d'une propriété conditionnelle : $P_{X\geq 10}(X \geq 13) = \dfrac{P[(X \geq 13) \cap (X \geq 10)]}{P(X \geq 10)} = \dfrac{P(X \geq 13)}{P(X \geq 10)}$, puisque l'événement « $X \geq 13$ » est inclus dans l'évènement « $X \geq 10$ », puis les propriétés de la fonction exponentielle :

$$\frac{P(X \geq 13)}{P(X \geq 10)} = \frac{\exp(13 \times (-0{,}2))}{\exp((10 \times (-0{,}2))} = \exp(-0{,}6).$$

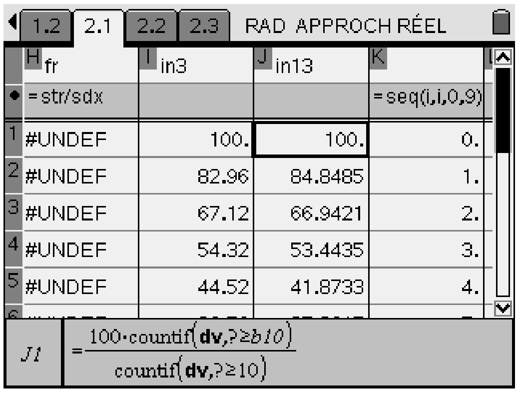
## 4. Pour aller plus loin.

Si on veut exploiter cette situation pour faire découvrir la notion de « non vieillissement », l'intérêt majeur est de comparer la « mortalité » des téléviseurs neufs pendant les premières années avec la « mortalité » des téléviseurs âgés de dix ans pendant les années qui suivent les 10 ans.
La simulation faite précédemment peut y aider si on compare l'évolution des deux populations : celle des téléviseurs neufs, et celle des téléviseurs de 10 ans.
Cependant, les effectifs des deux populations ne sont pas les mêmes. Pour les ramener à une même base, il y a avantage à les indexer (indice 100 au début) puis à donner en pourcentages les téléviseurs en état de marche au cours des années successives. C'est ce qui est fait dans les colonnes I et J qui donneront les pourcentages des téléviseurs encore en service au bout de *n* années après l'achat pour les neufs, après les années qui suivent le 10$^{e}$ anniversaire pour ceux de 10 ans. Dans I, l'indice 100 est inscrit en I1, puis la formule inscrite en I2 est recopiée vers le bas (ctrl menu 6) sur une dizaine de lignes. Dans J, la formule J1 est recopiée vers le bas sur le même nombre de lignes.
La colonne K contient les années successives et a la même taille que les deux colonnes I et J.



| | H fr | I in3 | J in13 | K |
|---|---|---|---|---|
| ♦ | =str/sdx | | | =seq(i,i,0,9) |
| 1 | #UNDEF | 100. | 100. | 0. |
| 2 | #UNDEF | 82.96 | 84.8485 | 1. |
| 3 | #UNDEF | 67.12 | 66.9421 | 2. |
| 4 | #UNDEF | 54.32 | 53.4435 | 3. |
| 5 | #UNDEF | 44.52 | 41.8733 | 4. |

I2 $=100\cdot\left(1-\dfrac{\text{countif}(\mathbf{dv},?<b1)}{\mathbf{ne}}\right)$



| | H fr | I in3 | J in13 | K |
|---|---|---|---|---|
| ♦ | =str/sdx | | | =seq(i,i,0,9) |
| 1 | #UNDEF | 100. | 100. | 0. |
| 2 | #UNDEF | 82.96 | 84.8485 | 1. |
| 3 | #UNDEF | 67.12 | 66.9421 | 2. |
| 4 | #UNDEF | 54.32 | 53.4435 | 3. |
| 5 | #UNDEF | 44.52 | 41.8733 | 4. |

J1 $=\dfrac{100\cdot\text{countif}(\mathbf{dv},?\geq b10)}{\text{countif}(\mathbf{dv},?\geq 10)}$

Ouvrir une nouvelle page **Graphiques & géométrie** et représenter les deux nuages de points (**années, indices**) pour les deux populations de téléviseurs.
Si le nombre **ne** est suffisamment élevé, on doit voir apparaître des évolutions assez similaires des deux indices, celui des téléviseurs neufs, et celui des téléviseurs âgés de dix ans : les taux de « survie » après 10 ans des téléviseurs âgés de 10 ans ressemblent aux taux de « survie » après la mise en service des téléviseurs neufs.
L'âge ne fait rien à l'affaire …