15

Chapitre

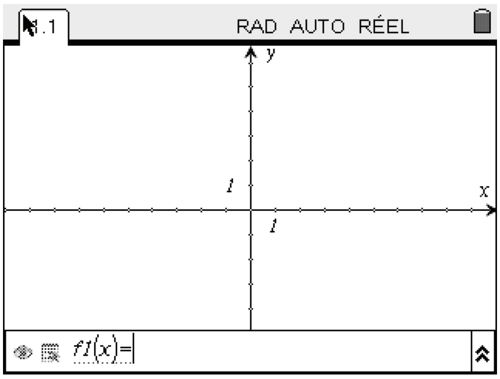
Géométrie dynamique avec TI-nSpire CAS

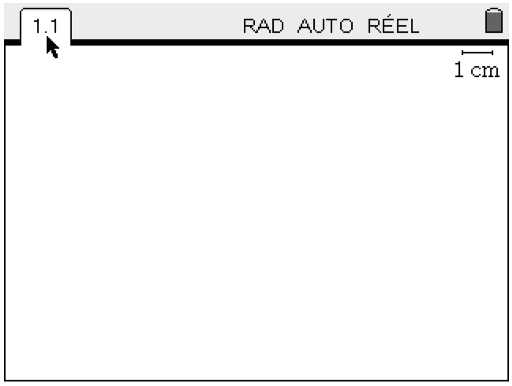
Ce chapitre propose, à partir de quelques exemples classiques, une prise en main de l'application **Graphiques & géométrie** de la calculatrice TI-Nspire et un tour d'horizon de ses différentes possibilités. Sans vouloir être exhaustif, notre but est simplement de donner au lecteur débutant quelques idées de base, qui lui permettront à son tour de traiter les situations qu'il rencontrera – elles sont nombreuses pour qui veut y réfléchir – avec le plus d'aisance possible. S'il est de plus habitué à la Voyage 200, notre lecteur ne devrait guère être dépaysé en travaillant sur l'application **Graphiques & géométrie**, où l'héritage Cabri des précédentes calculatrices est encore bien présent, avec en prime une résolution d'écran plus fine, un processeur plus puissant qui donnent un excellent confort de travail. Enfin, *last but not least*, l'intégration avec les objets géométriques usuels (points, droites, etc.) d'objets « analytiques » (comme les courbes représentatives de fonction) nous permettent de disposer d'un logiciel performant et souple de toute dernière génération. Signalons que les solutions des différents exercices proposés ne sont pas développées, tout au plus sont-elles parfois suggérées, à charge pour le lecteur intéressé de les approfondir : la documentation sur les thèmes abordés ne manque pas, à commencer par Internet. Rappelons aussi que la calculatrice est un excellent outil de conjecture mais qu'elle ne dispense en aucune façon des démonstrations mathématiques…

Sommaire

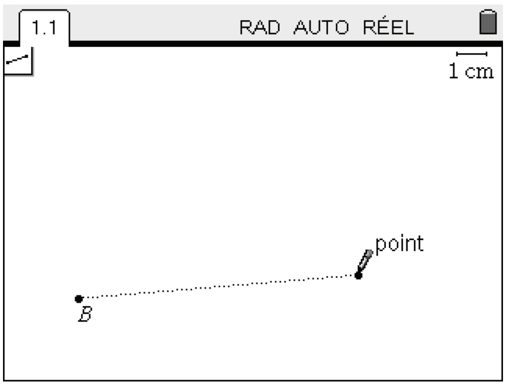
1. Autour du théorème de Viviani

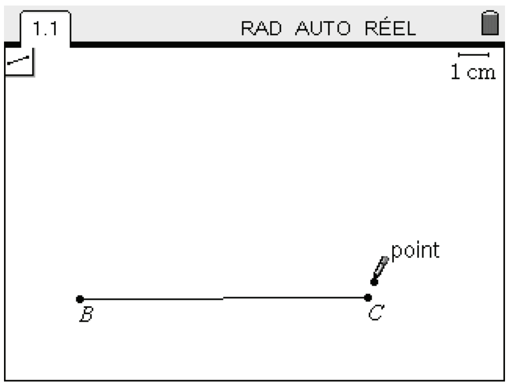
Ouvrons donc un nouveau classeur dans lequel nous insérons une page **Graphiques & géométrie**. Par défaut s'ouvre l'affichage Représentation graphique, avec un repère orthonormé et une ligne de saisie en bas de l'écran. Pour cet exercice, nous ne nous en servirons pas et nous demanderons l'affichage du plan géométrique, avec menu, **2: Affichage**, **2: Afficher le plan géométrique** (ou encore, en utilisant les numéros ou lettres qui précèdent les intitulés des menus, ce qui permet de gagner du temps, ici menu 2 2… les plus rapides à ce petit jeu peuvent devenir des virtuoses de la TI-Nspire, avec un peu d'entraînement). On obtient successivement les écrans ci-dessous :





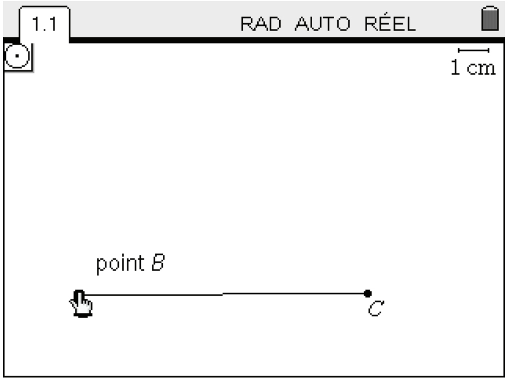
Dans ce plan géométrique, nous nous proposons de tracer un triangle équilatéral *ABC*. Nous commençons par dessiner un de ses côtés [*BC*] : menu **6: Points et Droites**, **5: Segment**. En déplaçant le pointeur en bas à gauche de l'écran, on clique pour placer le point *B* et tout de suite après, on le nomme en tapant CAPS B ; on étire le segment et on clique pour placer le point *C* à la position voulue, point que l'on nomme « à la volée » comme précédemment.

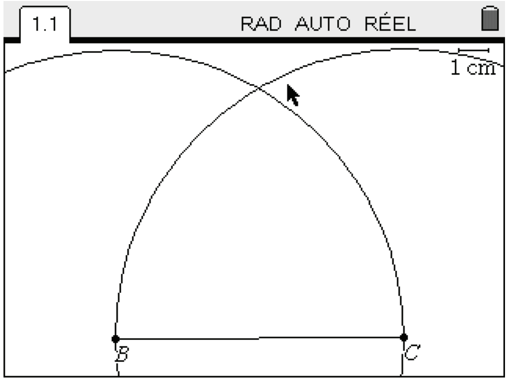




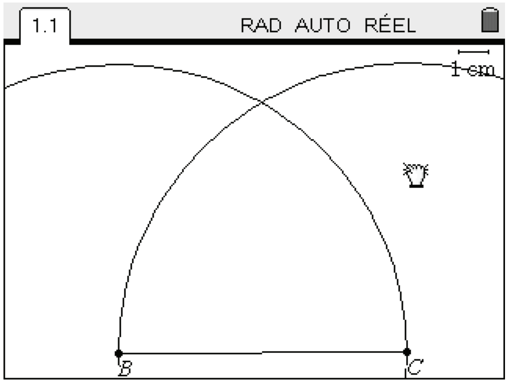
Reste à placer le troisième sommet, pour avoir un triangle équilatéral. Selon une construction des plus classiques, ce point est à l'intersection des cercles de centre *B* passant par *C* et de centre *C* passant par *B*. L'outil cercle est accessible par menu **8: Figures**, **1: Cercle** : on pointe successivement le centre, *B* pour le premier cercle, puis le point par lequel le cercle doit passer, *C* en l'occurrence. Quand, en s'approchant du point désiré, *B* ou *C*, le curseur se transforme en main et qu'apparaît le nom de l'objet comme le montre la figure ci-dessous (le point doit par ailleurs clignoter…), c'est que le point concerné a bien été identifié. En cliquant, il est sélectionné.

On recommence de la même façon pour le deuxième cercle.





Il est essentiel dans un logiciel de géométrie *dynamique*, non pas seulement de « reconstituer » du point de vue du dessin, ou des apparences, une figure donnée, mais surtout de mémoriser les propriétés ou les contraintes entre les différents éléments qui interviennent. Ici par exemple, un des cercles a pour centre *B* et passe par *C* et si *B* par exemple est déplacé, ces propriétés demeureront. Déplacez *B* ou *C* pour le vérifier : pour saisir un point, on s'en approche et lorsqu'il est identifié, on le saisit, soit par un appui prolongé sur la touche main ou, si l'on préfère, par ctrl.

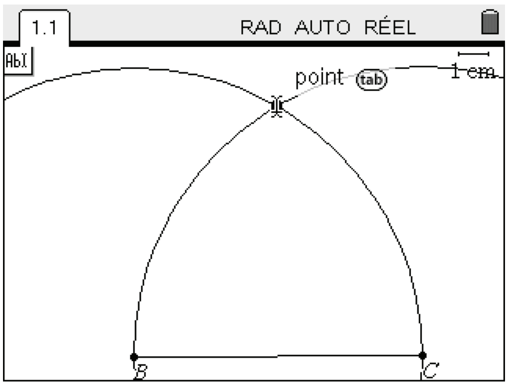


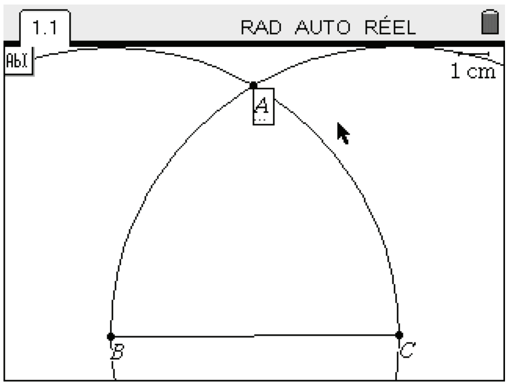
Si nécessaire, en se plaçant dans une partie vierge de la zone de travail, on peut saisir la page, ctrl et la déplacer pour la repositionner.

Le point d'intersection *A* est créé avec menu **6: Points et droites**, **3: Point(s) d'intersection.** Il suffit de pointer successivement un des cercles puis l'autre… et les *deux* points d'intersection sont créés… dont un, hors de l'écran, vers le bas et… qu'on ne voit pas !

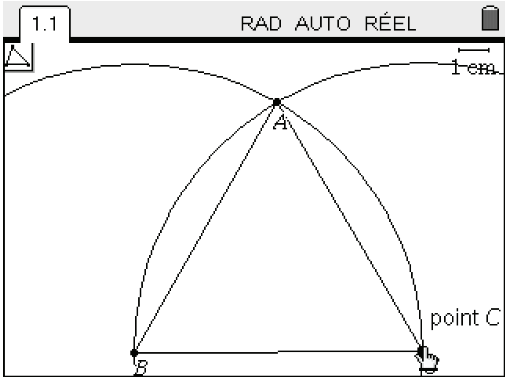
Nommons après coup le point qui nous intéresse avec l'outil Texte : menu **1: Actions**, **6: Texte.** Il suffit de s'approcher du point, jusqu'à ce qu'il soit identifié. On observe le message **point** tab… le tab indique que plusieurs objets pourraient être sélectionnés à cet endroit, le point et chacun des deux cercles. L'appui sur tab précisément permet le cas échéant de passer en revue tous les objets possibles.

Bref, le point étant identifié, on clique et à l'intérieur du petit cadre qui apparaît alors, on saisit son nom, ici *A*, puis on valide avec enter. On peut nommer, pas seulement des points, mais aussi des droites, ou des cercles, … et même si on le souhaite avec des lettres grecques (ctrl).

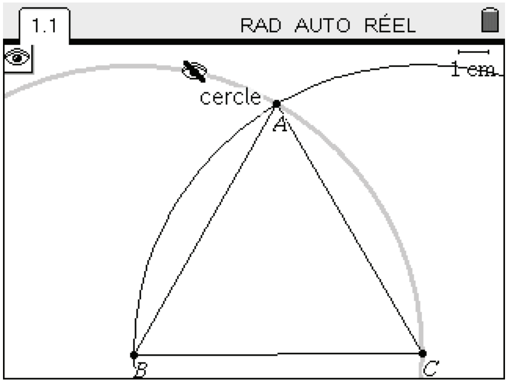


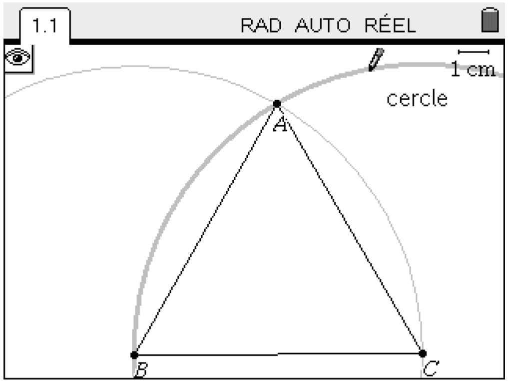


On construit alors le triangle avec menu **8: Figures**, **2: Triangle** : il suffit de cliquer sur chacun des sommets de ce triangle, en vérifiant que le curseur se transforme bien en main à l'approche du point considéré.

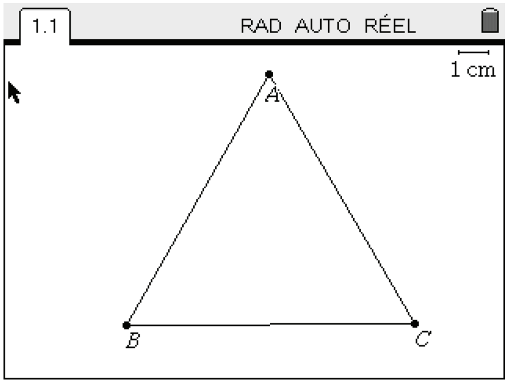


Comme dans Cabri, on peut cacher les constructions intermédiaires inutiles, ici par exemple les deux cercles, avec menu **1: Actions**, **3: Afficher/Cacher.** Un œil barré d'un trait signale que l'on peut cacher l'objet considéré : il apparaît alors en grisé dans ce menu et n'est plus visible dans les autres. À l'inverse, un crayon indique que l'on peut de nouveau faire réapparaître un objet précédemment caché.



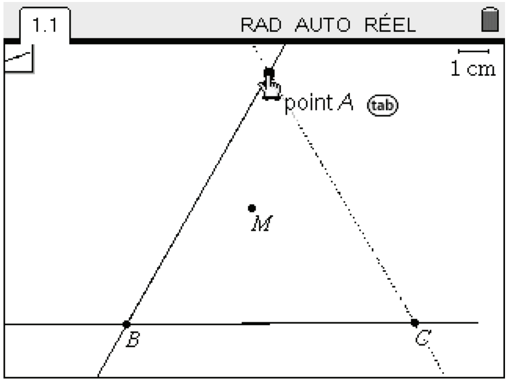


Bilan : le triangle équilatéral ABC est construit, avec trois objets « indépendants » (B, C et le segment $[BC]$) et des objets comme le point A, qui sont « dépendants » pour leur construction des précédents d'autres objets.
Bien sûr seuls peuvent être saisis et déplacés les objets indépendants de la figure, ici B, C, ou $[BC]$… mais pas A ! Faites l'essai…

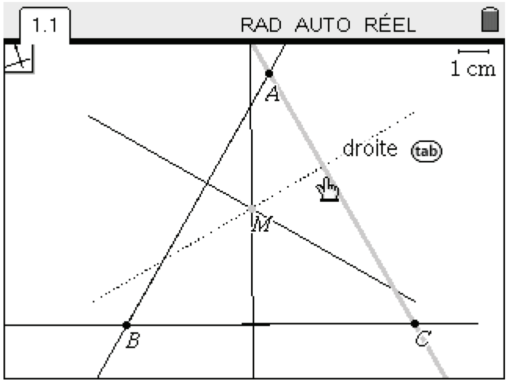


Poursuivons la construction pour mettre en évidence le théorème de Viviani : plaçons un point M (par exemple à l'intérieur du triangle, mais pas nécessairement) et projetons ce point orthogonalement en I sur la droite (AB), en J sur(BC) et en K sur (CA).

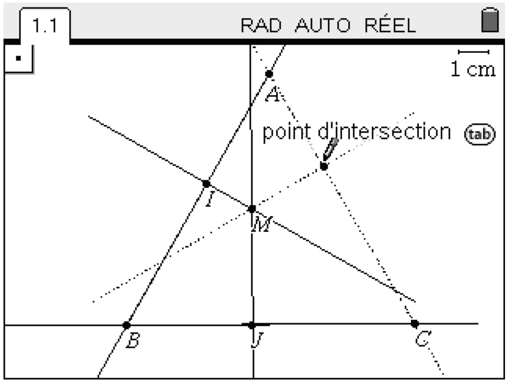
(menu) **6: Points et droites**, **1: Point**… et on place le point *M* quelque part à l'intérieur du triangle.
On trace ensuite les droites (*AB*), (*BC*) et (*CA*) avec (menu) **6: Points et droites**, **4: Droite**… droites sur lesquels on va projeter le point *M*. On pourrait projeter sur les segments, c'est possible du point de vue du logiciel, mais les projetés n'auraient plus d'existence hors des côtés du triangle… ce que nous ne souhaitons pas !



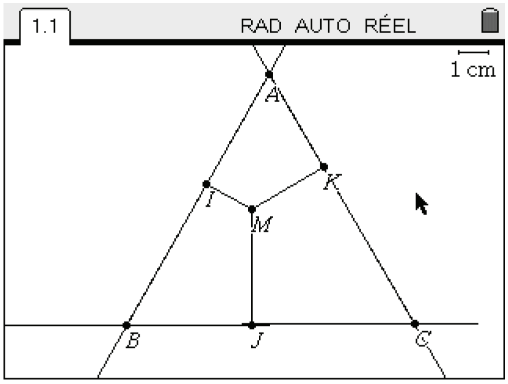
(menu) **9: Constructions**, **1: Perpendiculaire**, pour tracer la perpendiculaire à (*AB*) passant par *M* : on clique sur *M* et la droite, dans n'importe quel ordre… et la perpendiculaire attendue apparaît.
On procède de même pour la perpendiculaire à (*BC*) et à (*AC*) passant par *M*.



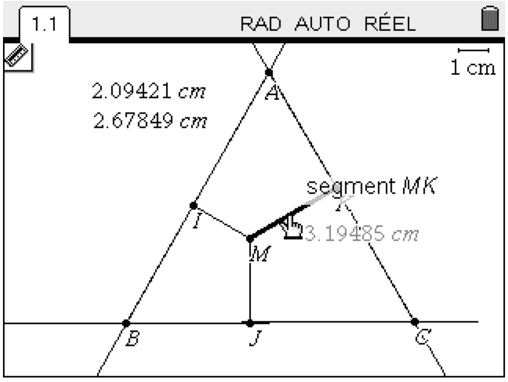
(menu) **6: Points et droites**, **1: Point** et l'on place les projetés orthogonaux, *I*, *J* et *K*… sans cette fois prendre le menu **3: Point(s) d'intersection…** mais en s'approchant suffisamment près des points d'intersection, la calculatrice comprend que c'est bien eux que l'on souhaite définir. Il faut cependant impérativement attendre le message **point d'intersection**… comme le montre la figure ci-contre.
Ne pas oublier de nommer les points aussitôt.

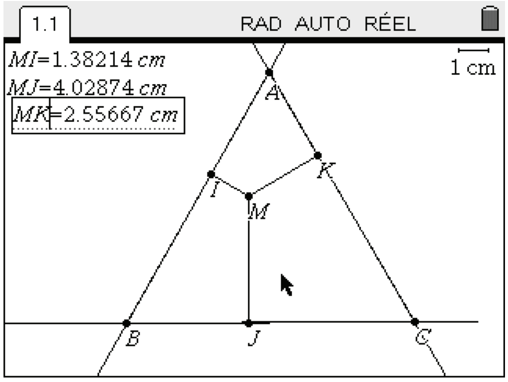


Reste à cacher les droites (*MI*), (*MJ*) et (*MK*) ((menu) **1: Actions**, **3: Afficher/Cacher**) et à construire ((menu)(6)(5)) les segments [*MI*], [*MJ*] et [*MK*]. On peut vérifier que le point *M* peut se déplacer librement et que les projetés orthogonaux *I*, *J* et *K* existent, même à l'extérieur des côtés du triangle.



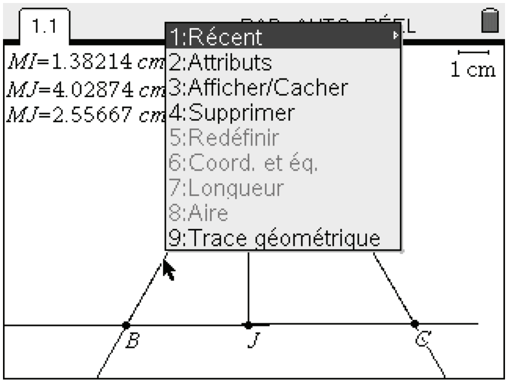
Enfin, demandons la longueur de chacun de ces segments… (menu) **7: Mesures**, **1: Longueur**. On clique ensuite sur chaque segment : une fois pour valider la demande et une deuxième fois pour déposer la longueur à l'endroit voulu.

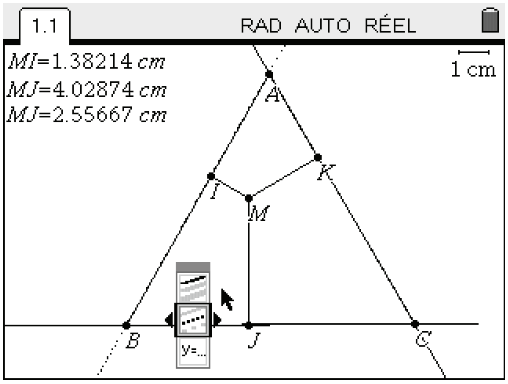


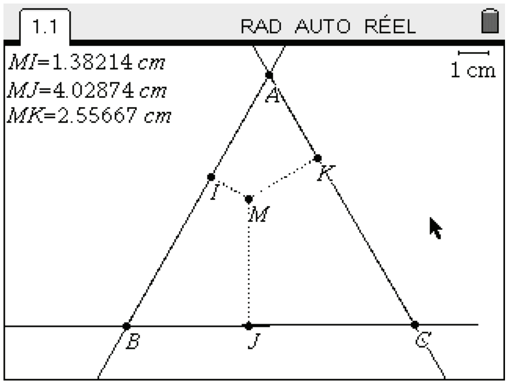


Il est possible d'améliorer la présentation des résultats : en cliquant une fois dans une des longueurs obtenue (au besoin faire esc une ou deux fois pour revenir dans le menu **1: Actions**, **1: Pointeur**) elle apparaît alors en grisé, puis en cliquant une deuxième fois, on peut modifier le résultat en ajoutant devant *MK*= juste devant. À répéter sur chaque résultat… Pour autant, ces ajouts ne sont que des commentaires, destinés à faciliter le déchiffrage de la figure et en aucune façon des variables TI-Nspire : d'ailleurs elles n'apparaissent pas en gras mais en italique.

La lisibilité peut aussi être améliorée en mettant en pointillé les segments [*MI*], [*MJ*] et [*MK*]. Il suffit après avoir pointé le segment, de faire apparaître un menu « contextuel » (ctrl menu) qui propose une liste d'instructions concernant ici le segment. Ici **2: Attributs** nous intéresse…





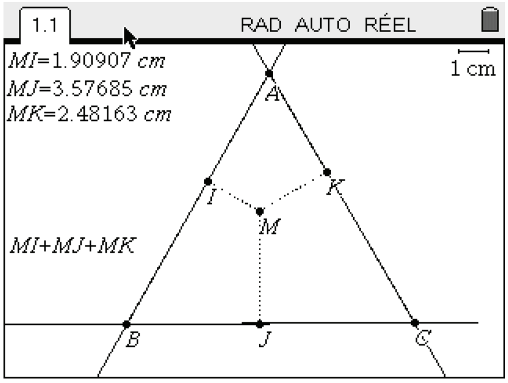


…et l'on choisit par exemple un style de trait en pointillé… On procède de même pour chaque segment.

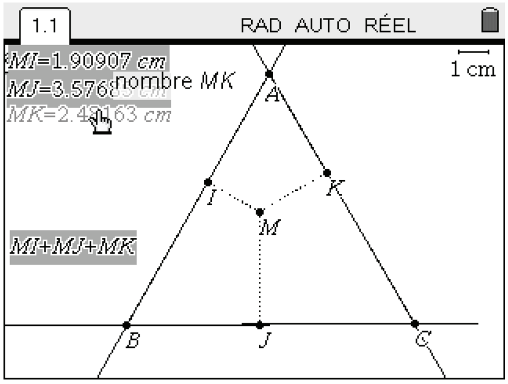
Le menu contextuel est très pratique, accessible immédiatement quel que soit le menu dans lequel on se trouve. De nombreuses propriétés intéressantes sont répertoriées et nous ne pouvons que conseiller au lecteur qui veut devenir efficace et rapide d'explorer les menus contextuels des différents objets.

Nous disposons maintenant des éléments qui permettent d'énoncer le théorème de Viviani : il affirme que la somme $MI + MJ + MK$ est constante, lorsque le point M est situé à l'intérieur du triangle.

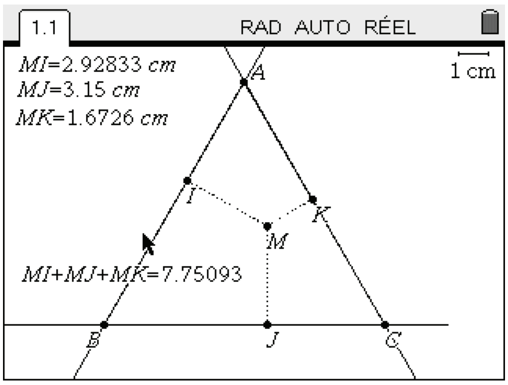
Il reste donc à demander ce calcul. On procède en deux temps.



D'abord on décrit dans un texte le calcul que l'on souhaite faire : ici avec (menu) **1: Actions**, **6: Texte**, on déplace le curseur à l'endroit désiré, on clique, puis on saisit $MI + MJ + MK$, enfin on valide par (enter).



Enfin, avec (menu) **1: Actions**, **8: Calculer**, on clique sur l'expression précédente pour en demander le calcul. L'expression se grise et la TI-Nspire nous demande de préciser ce que sont *MI*, *MJ* et *MK* : il suffit de l'indiquer en cliquant sur les longueurs correspondantes. L'expression est alors évaluée et on clique de nouveau à l'endroit souhaité pour voir apparaître son résultat. Rien n'interdit, avec le menu texte, d'ajouter un signe = *entre* l'expression et son évaluation (on ne peut pas, comme on l'a fait plus haut l'ajouter à la fin de $MI + MJ + MK$ ou au début du résultat renvoyé)…



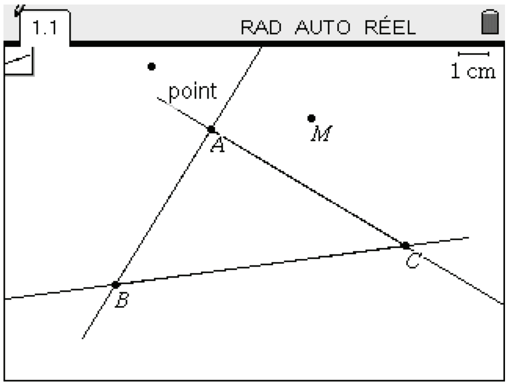
En bougeant le point M à l'intérieur du triangle, on constate, comme l'affirme le théorème de Viviani, que cette somme reste constante. En plaçant le point M en A, on remarque qu'elle est égale à la hauteur du triangle équilatéral ABC, soit $a\sqrt{3}/2$ où a désigne le côté du triangle.

Signalons qu'une démonstration très simple et quasi-immédiate est possible en décomposant l'aire du triangle ABC en la somme des aires des trois triangles AMB, MBC et MAC.

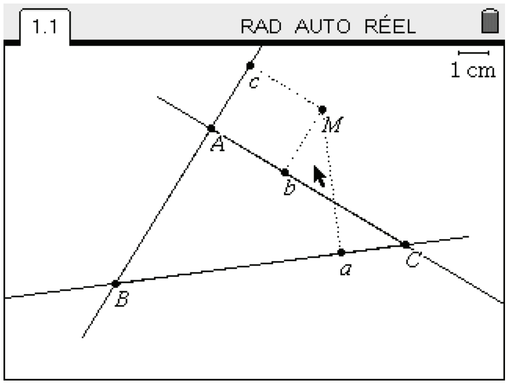
Le résultat demeure aussi pour n'importe quel point M du plan, pas seulement à l'intérieur du triangle équilatéral, à condition de considérer des sommes algébriques (c'est-à-dire qu'à l'intérieur du triangle, les distances sont comptées positivement… et quand on franchit un côté, la distance qui lui correspond est comptée négativement). Aussi étonnant que puisse paraître le résultat, une banale décomposition d'aire, comme précédemment, permet de conclure. La figure sous TI-Nspire est par contre plus délicate à faire, car il faut gérer les soustractions dès que le point franchit une des droites.

2. Droite de Simson & droite de Steiner

Poursuivons notre exploration. Nouveau classeur donc (ctrl N … vive les raccourcis clavier sur la calculatrice !), en y insérant une page **Graphiques & géométrie**. Nous travaillerons encore avec le plan géométrique (menu 2 2). Le démarrage est très proche de ce que nous avons fait précédemment…

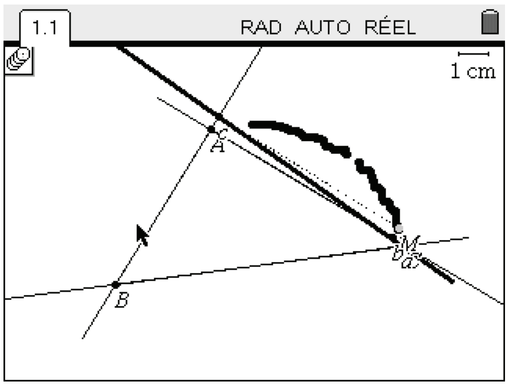


On commence par dessiner un triangle *ABC*, cette fois quelconque (menu 8 2), en n'oubliant pas de nommer les points « à la volée ».
On place ensuite un point *M* quelconque dans le plan (menu 6 1).
Traçons (menu 6 4) aussi les droites (*AB*), (*BC*) et (*CA*). On arrive à la figure ci-contre.



On projette ensuite le point *M* sur en *c* sur la droite (*AB*), en *a* sur la droite (*BC*) et en *b* sur la droite (*CA*).
On trace donc la perpendiculaire à (*AB*) passant par *M* (menu 9 1) ; on appelle *c* le point d'intersection de cette droite et de (*AB*) (menu 6 3). On cache la perpendiculaire (menu 1 3) et on trace le segment [*Mc*] (menu 6 5), qu'on peut faire apparaître en pointillé (ctrl menu) quand le curseur pointe le segment. On procède de la même façon pour les autres segments. On obtient la figure ci-contre.

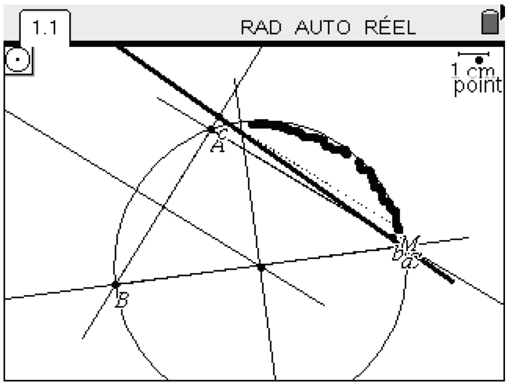
La question que nous nous posons est la suivante : les points *a*, *b* et *c* peuvent-ils être alignés et si oui, pour quelles positions du point *M* ? Pour mieux visualiser ce qui se passe, on peut par exemple tracer la droite (*ac*) (menu 6 4), la mettre en gras (ctrl menu après s'être approché de la droite… c'est dans le menu contextuel) et essayer, en bougeant *M*, de placer et de maintenir le point *b* sur cette droite. Manipulation délicate et quelque peu approximative ! Au demeurant, remarquons que les sommets du triangle appartiennent à l'ensemble cherché, puisqu'en cet endroit deux des projetés sont confondus.



La fonction **trace** permet de conserver la trace physique des déplacements successifs du point *M* : menu, **5: Trace**, **3: Trace géométrique.** On clique ensuite sur le point *M* pour le sélectionner. Essayons de le déplacer entre *A* et *C* par exemple de telle sorte que les trois points *a*, *b* et *c* restent alignés.

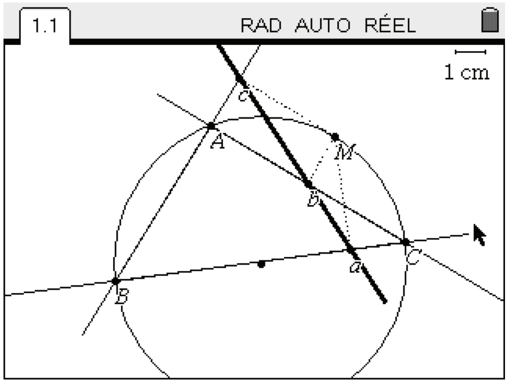
Même si c'est imprécis, il semble bien que le point *M* se déplace sur le cercle circonscrit au triangle *ABC* (qui a aussi l'avantage… de passer par *A*, *B* et *C*).

Traçons donc ce cercle circonscrit, à partir des médiatrices des côtés [*AB*] et [*BC*] par exemple : menu, **9: Constructions**, **3: Médiatrice.** En s'approchant d'un côté, si c'est le triangle qui est proposé, il faut appuyer sur tab pour accéder au côté, sur lequel on clique. La médiatrice apparaît alors.



On peut alors demander le cercle de centre le point d'intersection des médiatrices et passant par *B*. menu, **8: Figures**, **1: Cercle.** En s'approchant du point d'intersection des médiatrices, le logiciel comprend qu'il s'agit de ce point et le propose, sans qu'il ait été préalablement défini. On clique ensuite sur le point *B*. Le cercle apparaît.

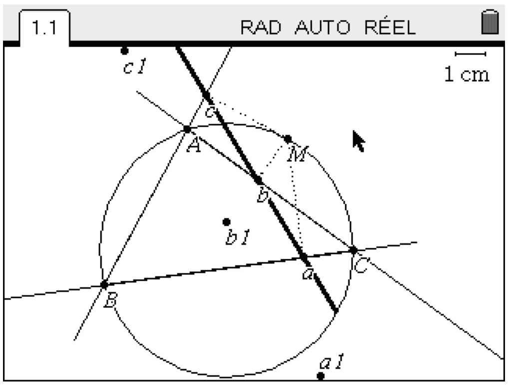
La trace du point *M* semble effectivement très proche du cercle.

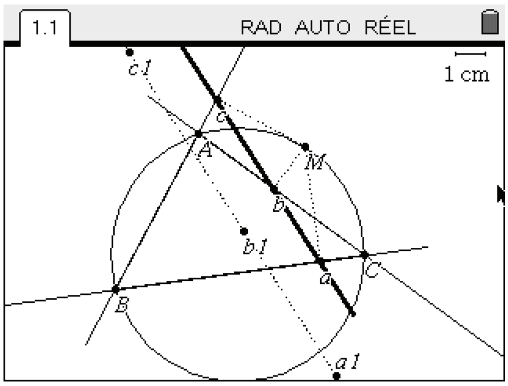


Cachons alors les deux médiatrices (menu 1 3) et supprimons la trace (menu 5 4). Imposons au point *M*, non plus de se trouver n'importe où dans le plan, mais de décrire le cercle circonscrit au triangle *ABC*, ce que l'on peut faire en redéfinissant le point : menu **1: Actions**, **9: Redéfinir.** Il suffit alors de cliquer sur le point *M*, puis de cliquer sur le cercle pour indiquer sa nouvelle destination (et les constructions liées à *M* suivent le mouvement…)

La première impression est confirmée : avec *M* sur le cercle circonscrit, les trois points *a*, *b* et *c* semblent alignés sur une droite. C'est bien le cas et la démonstration peut se faire par des considérations angulaires. La droite en question est appelée **droite de Simson du triangle relative au point *M*.**

Considérons maintenant les symétriques orthogonaux du point *M* par rapport aux droites (*AB*), (*BC*) et (*CA*), que l'on nomme *c*1, *a*1 et *b*1. On les construits avec menu, **A: Transformations**, **2: Réflexion** : on sélectionne dans n'importe quel ordre le point et l'axe de symétrie … le symétrique apparaît alors. Comme d'habitude, pensons à nommer les points obtenus « à la volée ». Au besoin, la figure peut être réajustée pour qu'elle tienne sur l'écran de la calculatrice. On remarque que les points *a*1, *b*1 et *c*1 semblent eux aussi alignés sur une droite, que l'on appelle **droite de Steiner du triangle *ABC*, relative au point *M*.** Cette droite peut être tracée et mise en pointillé.





La démonstration est immédiate car cette droite est l'image de la droite de Simson du triangle par une homothétie de centre *M* et de rapport 2.

3. L'gars Pierre et sa vache…

Comme quoi la campagne normande et les paisibles bovins qui y paissent sont propices à la rêverie mathématique… Le problème est le suivant : l'gars Pierre est un paysan cauchois, qui n'aime pas perdre son temps et qui économise ses pas. Il faut dire qu'il en fait des pas dans sa journée ! Il est donc dans son grand champ, avec son seau, vide, à 700 mètres (7 hm donc…) de la rivière et sa vache Victorine, là-bas tout au loin, a soif… et les vaches assoiffées, en Normandie en tout cas, aiment bien se faire servir.

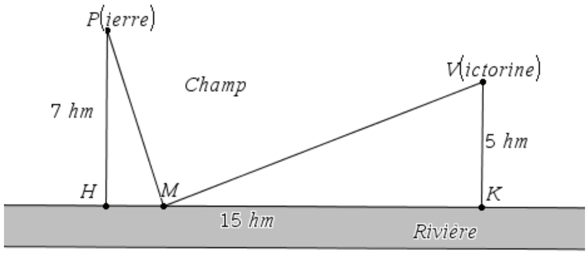


Figure réalisée avec le logiciel TI-Nspire : $PH = 7$ hm, $HK = 15$ hm et $KV = 5$ hm

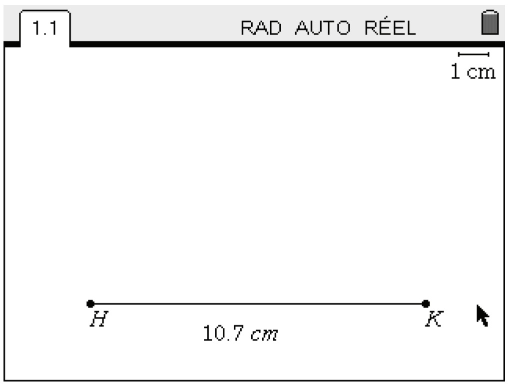
Bref, l'gars Pierre doit aller depuis le point P, où il se trouve, vers un point M à la rivière, pour y remplir son seau et repartir vers sa vache V. Et l'gars Pierre, qui a de la jugeote, comme tous les Cauchois, sait bien qu'il y a un choix judicieux de M…

Bref, quel point M doit-il choisir pour que le parcours $PM + MV$ soit le plus court possible ?

Ouvrons donc un nouveau classeur dans lequel nous insérons une page **Graphiques & géométrie**. Comme précédemment, on demande l'affichage du plan géométrique (menu 2 2)

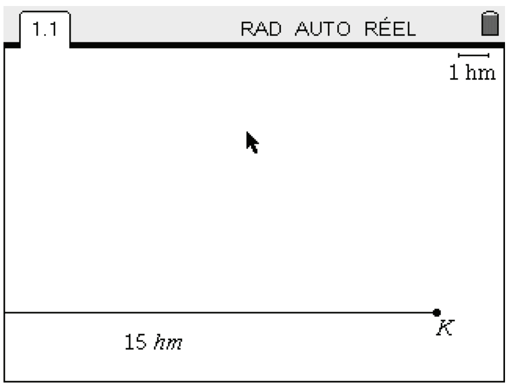
Commençons par tracer un segment [HK] quelconque (menu 6 5) dont on demande la longueur (menu 7 1 ou aussi, c'est plus rapide, par le menu contextuel du segment ctrl menu).

Si la graduation ne figure pas sur l'écran, on peut la demander menu **2: Affichage**, **7: Afficher la graduation.** Elle apparaît alors en haut et à droite.



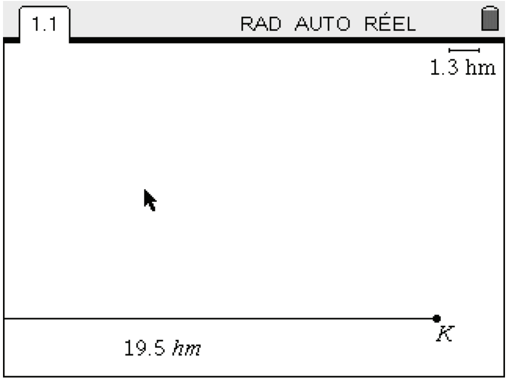
On constate tout d'abord que l'unité employée, le centimètre, ne convient pas pour l'exercice proposé. Rien de plus simple à modifier : on clique ( ) dans le texte de la graduation et on remplace « cm » par « hm »… le tour est joué ! Remarquons que l'unité est bien mise à jour dans la longueur HK.

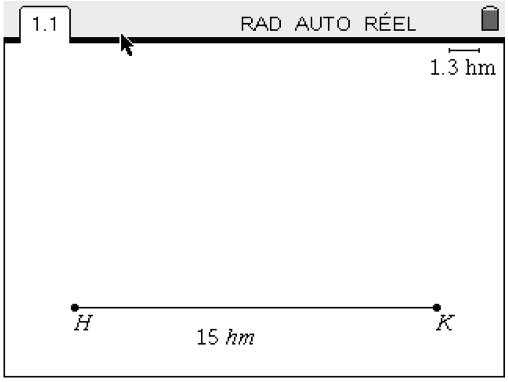
Maintenant, il faudrait mettre cette longueur à 15 hm : plutôt que de tenter un ajustement plus ou moins aléatoire de la longueur en bougeant K, on clique deux fois sur la longueur affichée (éventuellement, faire au préalable esc esc pour sortir d'un menu précédent) et on saisit la valeur 15 souhaitée.



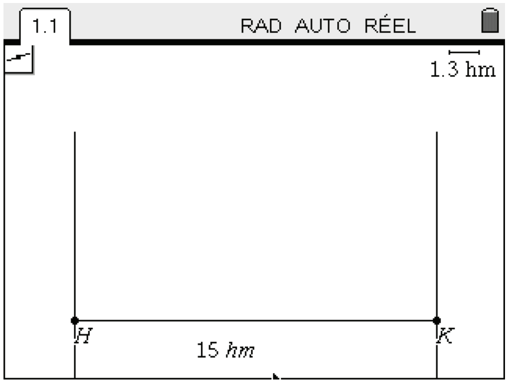
Mais… le segment [HK] sort de la feuille… Modifions donc la longueur de la graduation : avec une unité un peu plus petite, le même segment [HK] sera mesuré par un nombre plus grand et donc, ramené à 15, il aura toutes les chances de tenir dans la feuille.

Par exemple, on peut décider que le segment de la graduation représente 1,3 hm au lieu de 1 hm, ce qui correspond bien à une unité plus petite. Il suffit de cliquer et de modifier tout bêtement le nombre de la graduation. Comme prévu, la longueur affichée *HK* est *augmentée*, pour le *même* segment… on remet cette longueur à 15 hm (en la modifiant) et l'on constate que le segment rentre maintenant dans la page. Remarquons la souplesse du procédé qui nous permet de traiter n'importe quelle unité et n'importe quelle longueur.

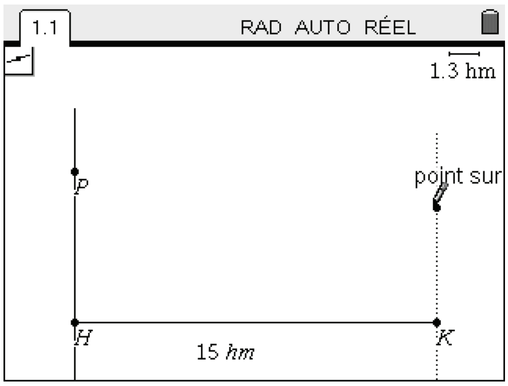




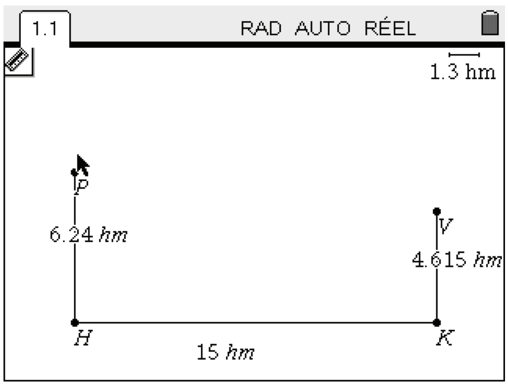
Poursuivons la construction avec la droite perpendiculaire en *H* à (*HK*) et avec la droite perpendiculaire en *K* à (*HK*) : (menu) 9 1.



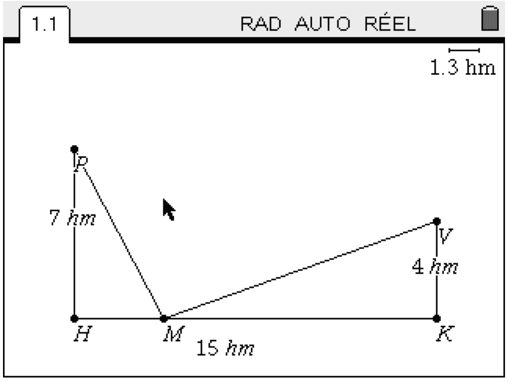
Plaçons le point *P* sur la première des droites, avec (menu) **6: Points et droites, 2: Point sur.** Il suffit de s'approcher de l'objet sur lequel on veut placer le point, ici la première droite. Ce point sera astreint à se déplacer sur la droite considérée et rien que sur cette droite. Dès qu'il est placé, on peut le nommer comme d'habitude. On fait de même pour *V* sur la deuxième droite.

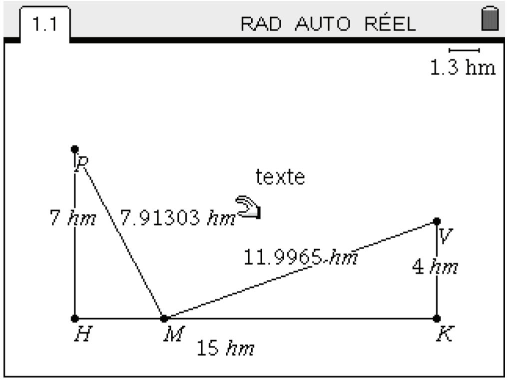


Comme d'habitude, on cache les deux droites verticales ((menu) 1 3) et on trace le segment [*PH*] et le segment [*VK*] ((menu) 6 5).
On demande ensuite les longueurs *PH* et *VK*, que l'on peut ajuster, la première à 7 hm et la seconde à 5 hm. L'extrémité libre de chacun des segments est alors déplacée pour remplir la condition de longueur.

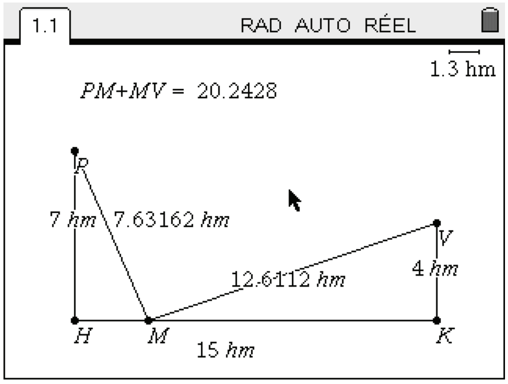


Enfin, plaçons le point *M* sur le segment [*HK*] (menu 6 2) et traçons les segments [*PM*] et [*MV*] (menu 6 5) ; demandons aussi l'affichage des longueurs *PM* et *MV* (menu 7 1).

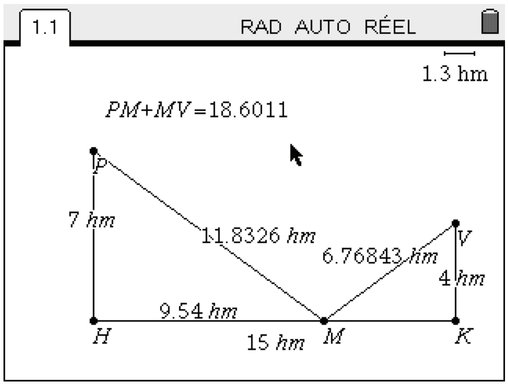




Tous les éléments sont maintenant en place pour traiter le problème posé : il nous reste juste à connaître la valeur de $PM + MV$ et à minimiser cette distance avec un choix judicieux de *M*. Faisons le calcul de la distance parcourue par Pierre, comme on l'a vu plus haut.
On crée d'abord un texte (menu 1 6), par exemple $PM + MV$.
Ensuite, avec menu 1 8, on demande le calcul de cette expression, en cliquant successivement sur les valeurs de notre page qui représentent *PM* et *MV*. Un signe = (menu 1 6) peut être ajouté entre le résultat obtenu et l'expression $PM + MV$.

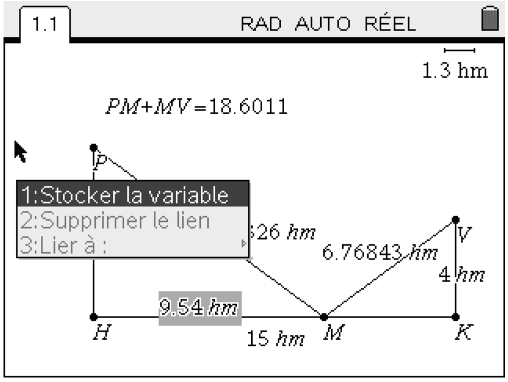


La recherche du minimum de distance peut alors se faire de manière « empirique ». En saisissant le point *M* pour le déplacer (ctrl), la position ci-contre devrait satisfaire notre ami Pierre. C'est apparemment la plus petite obtenue, avec *M* situé à 954 m de *H* (la *distance* de *H* à *M* a été ajoutée sur le dessin… menu 7 1, en cliquant successivement sur *M* et *H*).

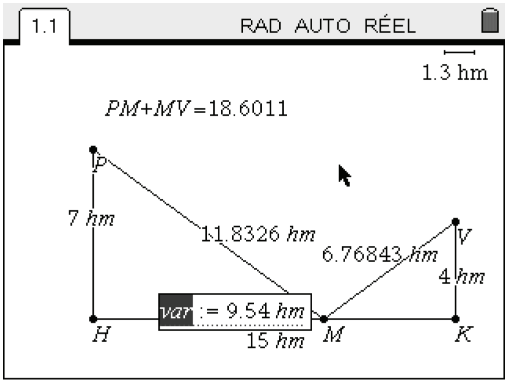


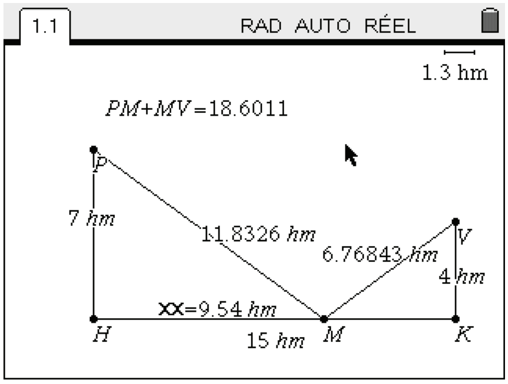
Soyons mathématiquement plus précis. Évidemment la situation peut être modélisée par la recherche du minimum de la fonction *f* qui exprime la distance *y* parcourue par Pierre en fonction de $HM = x$. Quand on déplace le point *M*, c'est d'ailleurs cette fonction que l'on voit en action. On aimerait simplement pouvoir récupérer les différentes valeurs de *x* et de *y*, pour avoir l'allure de la courbe représentative de *f*. Rien de plus facile avec TI-Nspire !

Tout d'abord, il faut définir des *variables* dans la fenêtre de géométrie, pour que la calculatrice puisse communiquer avec une autre application, le tableur par exemple.
Appelons **xx** la distance *HM* (évitons l'emploi de **x**, car on en a souvent besoin dans une autre page en calcul formel). Pour ce faire, on clique une fois sur la valeur 9,54 correspondant à HM, pour qu'elle se grise et on appuie sur le bouton (sto var). Apparaît alors une fenêtre dans laquelle on choisit **1: Stocker la variable.**



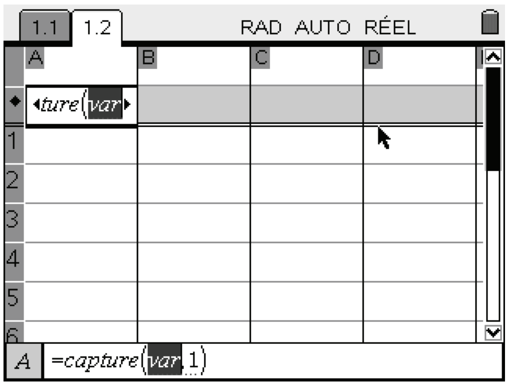
Un zone en surbrillance marquée **var** apparaît juste devant la valeur de *HM* : on saisit alors **xx** et l'affectation **xx :=9.54** montre que la variable **xx** contient à tout moment la valeur en cours de la longueur *HM*. Comme d'habitude avec TI-Nspire, le nom **xx** apparaît alors en gras, pour indiquer qu'une variable a été définie.
De la même façon, on appelle **yy** la valeur de *PM* + *MV*, 18,6011 dans notre cas, en suivant la même procédure.



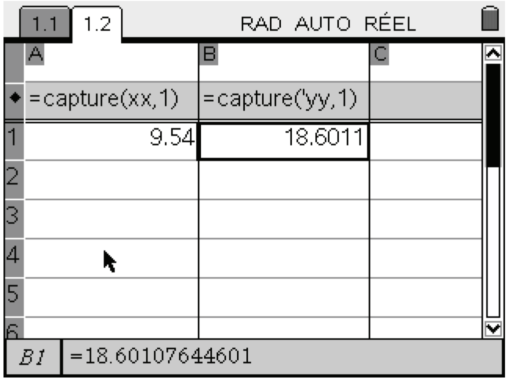


Ouvrons maintenant une page **Tableur et listes** (ctrl I) pour récupérer dans deux colonnes les valeurs successives prises par les variables **xx** et de **yy**. La technique consiste à capturer automatiquement, dans les colonnes A et B, chacune des valeurs de ces deux variables lorsque le point *M* bougera, ou aura été animé.

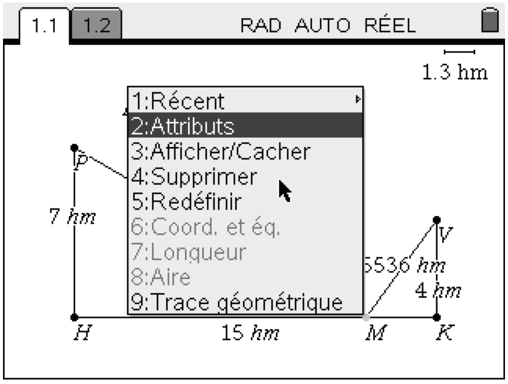
On se place dans la zone grisée de la colonne A, car l'instruction que l'on va saisir concerne la colonne tout entière et non pas une de ses cellules. On appuie sur (menu) **3: Données, 2: Capture de données, 1: Capture de données automatique.** Il reste à compléter dans l'instruction de capture qui apparaît par la variable à capturer, ici **xx** (en appuyant sur la touche (sto var), on a toutes les variables disponibles, sinon on peut saisir **xx** directement). On valide par (enter). La valeur actuelle de la variable est capturée.

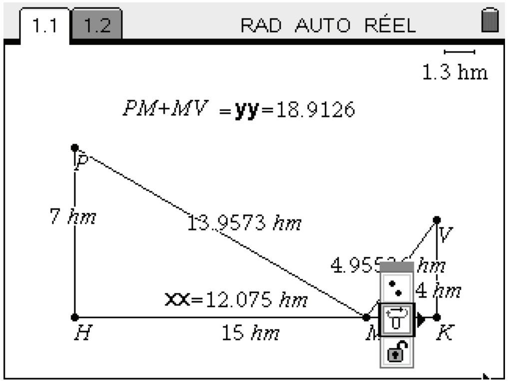


On procède de même pour la variable **yy**. Signalons que le paramètre 1 de l'instruction **capture** indique que la capture est automatique. Pour une capture manuelle, ce paramètre serait égal à 0.

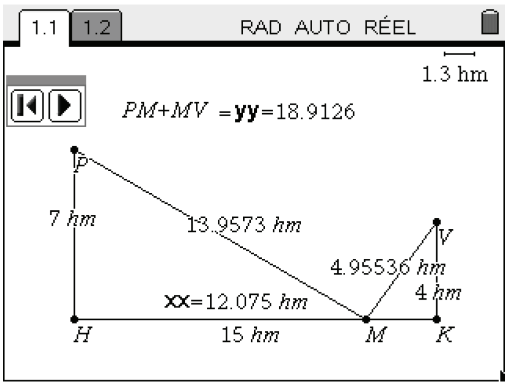


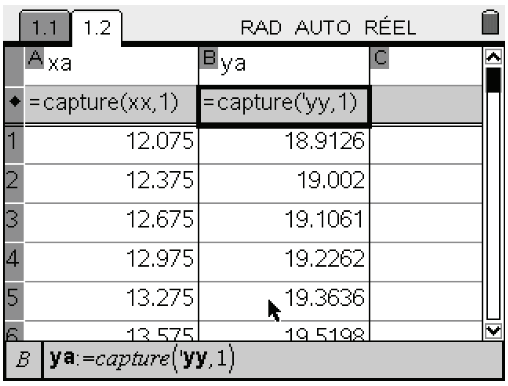
Si l'on repasse dans l'application **Graphiques et géométrie**, le simple fait de bouger le point M modifie les valeurs des variables et enclenche leur capture dans le tableur. On peut aussi animer le point M, pour qu'il bouge tout seul. L'animation d'un point est en fait un de ses attributs, accessible par le menu contextuel du point considéré ctrl menu :





On peut par exemple choisir l'animation en va-et-vient, ce qui signifie que le point M parcourra le segment [HK] dans un sens puis dans l'autre. Il reste à préciser une vitesse, comprise entre 1 et 9 (elle est par défaut égale à 0 pour un point… qui ne bouge pas). On tape au clavier 2 par exemple et l'animation est lancée. Quand on valide par enter, un bouton est disponible dans la figure, pour suspendre ou réinitialiser cette animation. Signalons que l'animation peut être annulée en remettant dans les attributs du point la vitesse à 0.

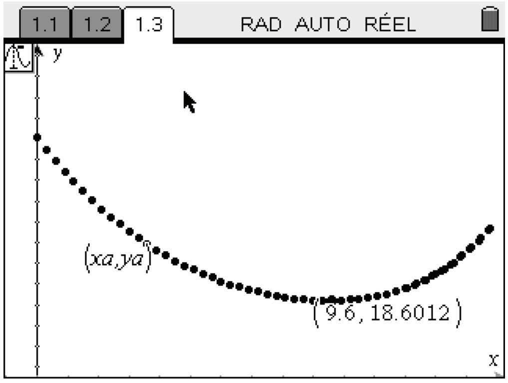




Comme prévu, les colonnes A et B se sont bien remplies de valeurs des variables. Après les avoir nommées, par exemple **xa** et **xb**, noms saisis tout en haut de colonnes au dessus des zones grisées, on peut en demander la représentation graphique sous forme d'un nuage de points.
Signalons que l'on peut effacer une colonne de données capturées, en se positionnant dans la zone grisée tout en haut et en appuyant deux fois sur la touche **enter** : ne demeure alors que la valeur capturée en cours.

Ouvrons donc une nouvelle page **Graphiques et géométrie** dans notre classeur. Puis menu, **3: Type de graphique**, **4: Nuage de points.** Dans la ligne de saisie, tout en bas de l'écran, en cliquant sur la case nommée **x**, on choisit la variable **xa**, qui apparaît alors, par tab ou ▶, on passe à la case notée **y**, où l'on choisit **ya**. On sort tout de suite de la ligne de saisie par esc, sous peine de modifier ces valeurs. On peut aussi cacher cette ligne de saisie avec menu, **2: Affichage**, **6: Cacher ligne saisie**, ou mieux encore, parce que plus rapide, par le raccourci ctrl G, comme indiqué dans le menu précédent.

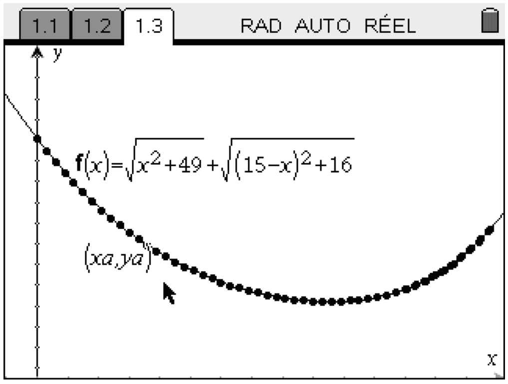
Un zoom permet de cadrer automatiquement la fenêtre pour que l'ensemble du nuage de points soit visible : menu, **4: Fenêtre**, **9: Zoom – Données.** On a ainsi une excellente vision de la représentation graphique de f puisque tous ces points en font partie… Un minimum notamment est bien mis en évidence avec menu, **5: Trace**, **1: Trace :** La valeur obtenue est proche de celle qu'on a rencontrée.



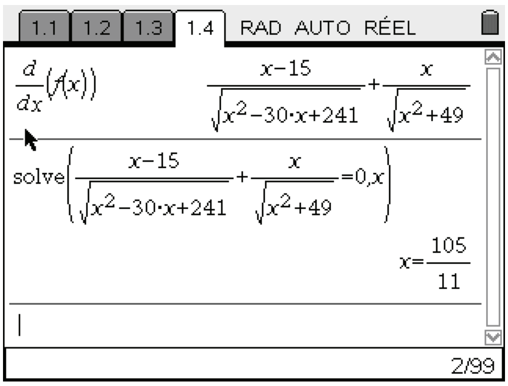
Plus précisément, l'expression de f peut être obtenue très simplement :

$$f(x)=\sqrt{x^2+49}+\sqrt{(15-x)^2+16}\ .$$

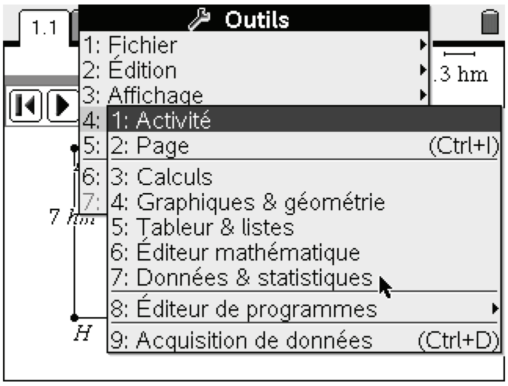
Demandons le tracé de cette fonction dans la page **Graphiques et géométrie**, celle-là même où nous avons tracé le nuage de points. On demande l'affichage de la ligne de saisie des fonctions avec menu, **3: Type de graphique**, **1: Fonction**
et l'on tape la formule précédente… en retirant simplement le 1 de **f1** pour avoir le même nom f que dans l'exercice… La courbe se superpose très exactement au nuage de points, fort heureusement d'ailleurs.



Ouvrons enfin pour terminer une nouvelle page de **Calculs** (ctrl I) et demandons la dérivée de la fonction f. Cette dérivée s'annule en 105/11 comme le montre l'écran ci-dessous, ce qui correspond à très peu près à la valeur pressentie…

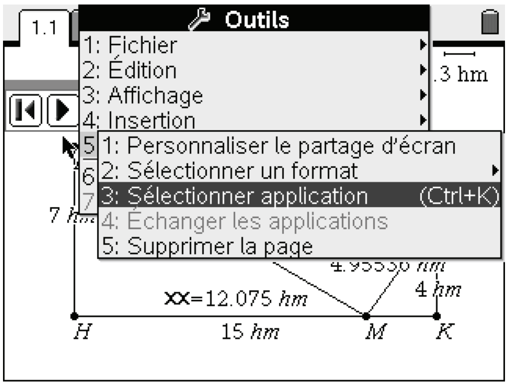


Autre approche pour cet exercice : un procédé géométrique simple permet de déterminer le minimum de cette fonction.

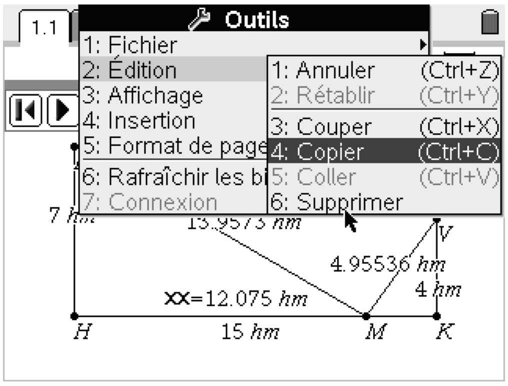


Insérons une nouvelle *activité* dans notre classeur : (ctrl)(⌂), c'est le menu Outils 🔧 et on choisit **4: Insertion**, **1: Activité**.
Attention, les variables définies précédemment, comme **xx** par exemple, disponibles comme on l'a vu d'une page à l'autre d'une même activité, ne seront plus visibles depuis la nouvelle activité.

Recopions simplement la figure que nous avons obtenue sur la page 1.1 sur une nouvelle page de cette activité.

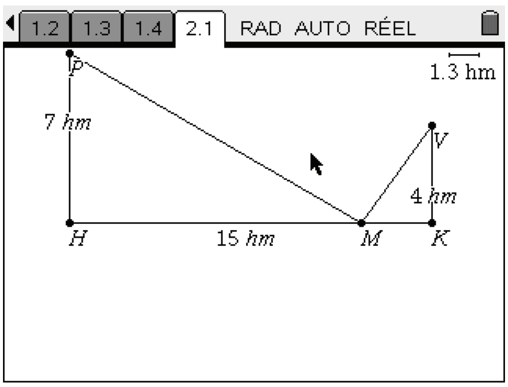


On va donc sur la page de géométrie en question. Avec le menu Outils 🔧 ((ctrl)(⌂)), on choisit **5: Format de page**, **3: Sélectionner application**. Au passage, on peut remarquer que le raccourci pour ce menu est (ctrl)(K)… Un cadre noir clignotant montre que l'application est sélectionnée…



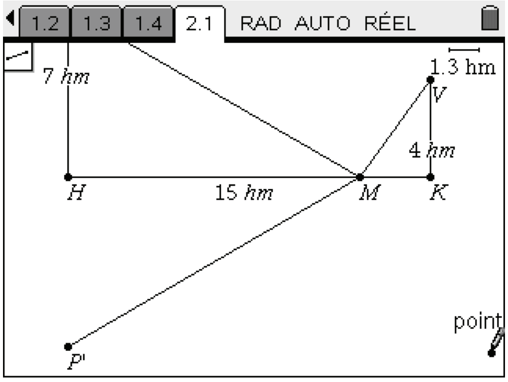
On est prêt pour la copier : toujours dans Outils 🔧, **2: Edition**, **4: Copier** ou encore (ctrl)(C) si l'on est adepte des raccourcis.

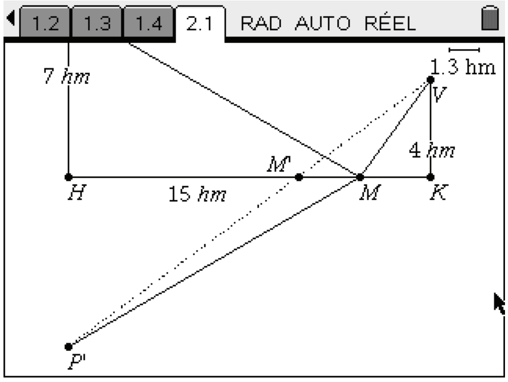
Collons maintenant… Dans la page vierge de notre nouvelle activité, au besoin faire (esc) pour sortir du menu de choix d'application, il suffit de coller (Outils 🔧 toujours, **2: Edition**, **5: Coller**) l'application que nous venons de copier.



Nous disposons de la même page que celle que nous venons de copier mais dans une autre activité. Enlevons tous les éléments inutiles : (esc)(esc) pour revenir au menu Pointer, on clique une fois sur l'objet à supprimer et on appuie sur (clear). On devrait pouvoir arriver à l'écran ci-contre.

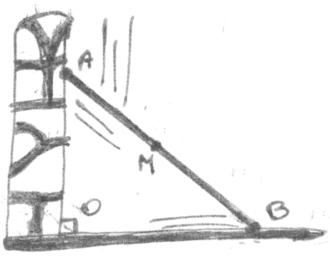
Traçons alors le symétrique *P'* de *P* par rapport à (*HK*) : (menu) **A: Transformations**, **2: Réflexion.** On clique sur *P* et le segment [*HK*] : le point *P'* est créé, il n'est pas visible, mais on peut le nommer « à la volée ». En remontant la page, on le fait apparaître et on peut ensuite tracer le segment [*P'M*].





Il est alors clair que *PM* + *MV* = *P'M* + *MV*. Grâce à l'inégalité triangulaire, cette longueur est toujours au moins égale à la longueur *P'V*, longueur elle-même atteinte lorsque les points *P'*, *M* et *V* sont alignés. Ceci donne géométriquement la position du point pour avoir le minimum de chemin à parcourir. Les calculs précis, notamment ceux de *HM'* et de *PM'*+*M'V*, peuvent alors être menés par des considérations de Thalès, ou de triangles semblables, relevant du programme de seconde.

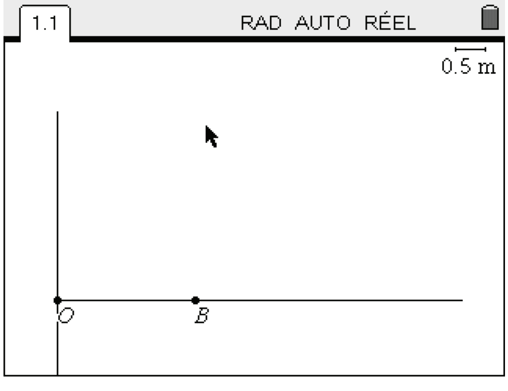
4. Et l'échelle glissa…



Le problème est classique et rappelle les plus élémentaires règles de prudence avant de quitter le plancher des vaches et de se percher sur une échelle [*AB*] de 3,5 mètres de long appuyée contre un mur… faute de quoi, la dite échelle peut glisser jusqu'au sol, le point *A* se déplaçant sur le mur, depuis le moment où l'échelle est quasi-verticale, jusqu'à se retrouver à plat. La question que l'on se pose est :
Quel est le lieu du point *M* milieu de [*AB*] lors de cette descente un peu précipitée de l'échelle ?

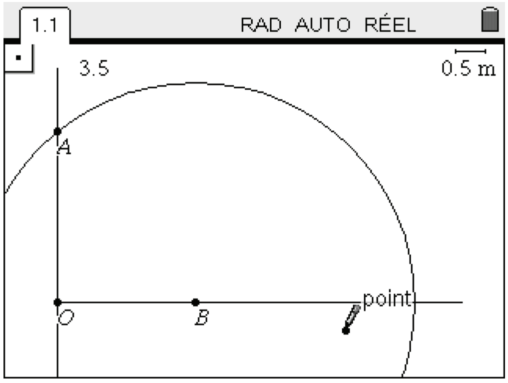
Nouveau classeur, avec une page **Graphiques & géométrie** et plan géométrique, comme d'habitude ((menu) 2 2). Un petit ajustement des unités : on remplace les centimètres par des mètres et on transforme 1 m en 0,5 m : rappelons qu'il suffit de cliquer et de demander ce que l'on veut.

Commençons par tracer une demi-droite d'origine *O* : (menu), **6: Points et droites**, **6: Demi-droite.** Pour qu'elle soit bien horizontale et éviter les « décrochements » de lignes liés à la pixellisation de l'écran, on appuie en même temps sur la touche majuscule : en fait, selon la position du curseur, cela contraint la demi-droite à faire un angle d'un multiple de 15° avec l'horizontale…

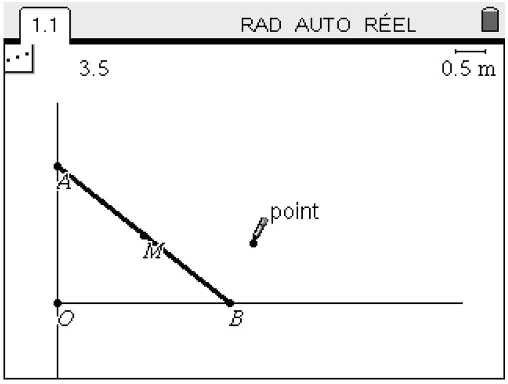


Sur cette demi-droite, on place un point *B* ((menu) 6 2) qui matérialisera l'extrémité inférieure de l'échelle. On peut aussi tracer le mur, c'est-à-dire géométriquement la droite qui passe par *O* perpendiculaire à la demi-droite : (menu) 9 1.

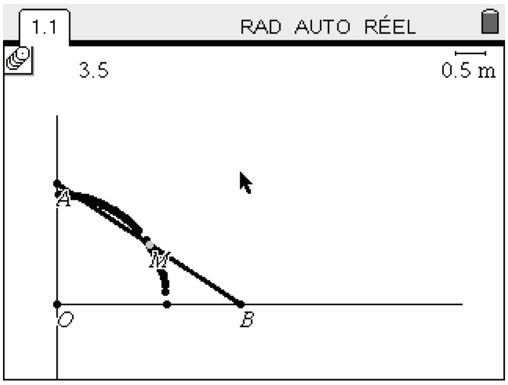
Le point *A* à tout instant est situé sur le cercle de centre *B* et de rayon 3,5… qu'il nous faut donc tracer. Ave l'outil texte (menu 1 6), on écrit 3,5 dans une zone de la page et on demande (menu 8 1) le cercle de centre *B* et de rayon 3,5 en cliquant successivement sur ces objets. Avec menu 6 1 et en s'approchant du point d'intersection du cercle tracé et de la droite verticale, on place le point *A*.

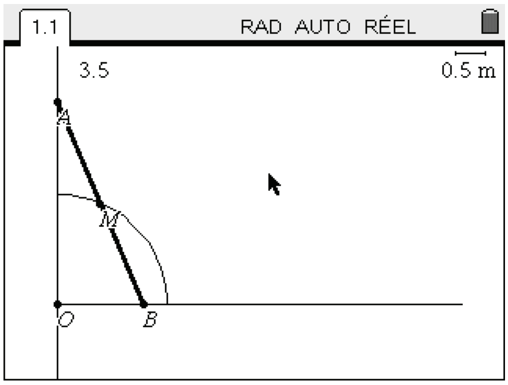


L'échelle est matérialisée par le segment [*AB*] (menu 6 5), que l'on peut tracer et mettre en gras, avec son milieu *M* (menu 9 5). Il reste à cacher les objets intermédiaires de la construction. Et voilà la figure terminée : en saisissant le point *B*, on reconstitue bien la désagréable glissade de l'échelle.

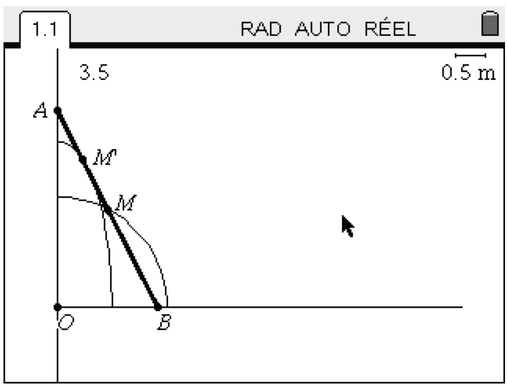


Avec trace (menu 5 3), en cliquant sur le point *M*, on matérialise la ligne sur laquelle se déplace le point. Il semble que cela soit un quart de cercle centré en *O*. Effaçons cette trace avec menu 5 4. Le lieu proprement dit peut être visualisé avec menu **9: Constructions**, **6: Lieu** : on clique sur le point *M* puis sur le point *B* pour avoir le lieu du point *M* quand le point *B* décrit la demi-droite.





On reconnaît un quart de cercle de cercle de centre *O* et de rayon 1,75 m. Si *M* n'est pas au milieu de [*AB*], il semble que le lieu soit une ellipse. Plus dure sera la chute si *M* est dans le haut de l'échelle, plus douce vers le bas… on s'en serait douté ! Remarquons aussi la mise à jour dynamique du lieu lorsqu'on bouge le point *M'* !

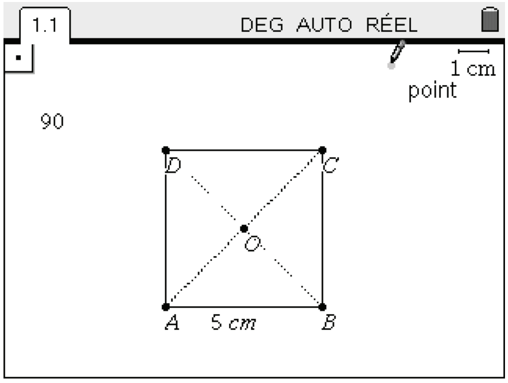


5. Un carré qui tourne

Un autre exercice très classique… qui nous permettra d'utiliser un curseur. On ouvre comme d'habitude un nouveau classeur, que l'on règle en degré (⌂ 8 1 ou ctrl 🔧 1 6) et pour lequel on demande l'affichage du plan géométrique.

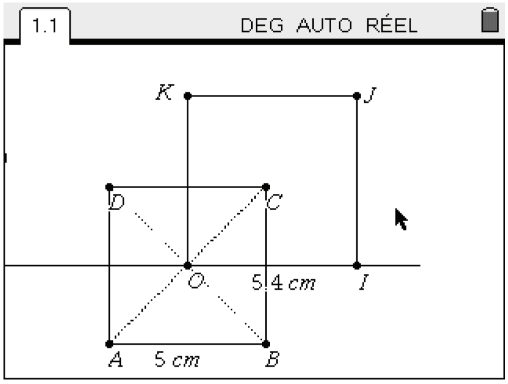
Le but est d'abord de construire un carré de côté 5 cm : commençons par un de ses côtés [*AB*], dont on ajuste la longueur à 5 cm. Pour construire le carré, on peut faire intervenir une rotation d'angle 90°, ce qui suppose de saisir au préalable 90 dans un endroit de la feuille (menu 1 6). On détermine l'image *D* de *B* dans la rotation de centre *A* et d'angle 90°, ainsi que l'image *C* de *A* dans la rotation de centre *D* et d'angle 90°.

L'outil Rotation est disponible dans menu **A: Transformations**, **4: Rotation**. Remarquons le premier point à cliquer est forcément le centre de la rotation, ce qu'indique le curseur avec sa double flèche.



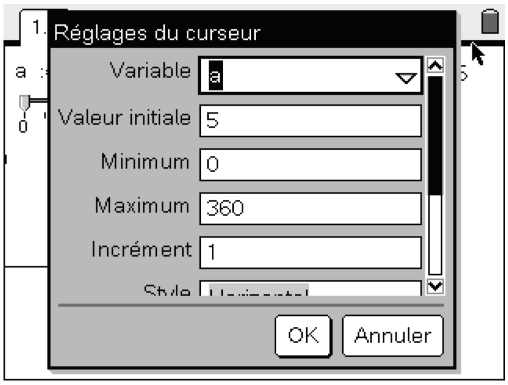
On peut alors compléter la figure avec l'outil Polygone menu, **8: Figures**, **4: Polygone** (plutôt que Rectangle menu 8 3, qui présente quelques lourdeurs parfois…). Repérons enfin le centre *O* du carré, en traçant ses diagonales [*AC*] et [*BD*].

Construisons maintenant un autre carré *OIJK*, comme l'indique la figure ci-après, dont un des sommets est *O*, dont les côtés de longueur 5,4 cm (ou n'importe quelle longueur excédant la moitié de la diagonale du premier carré) sont respectivement parallèles aux côtés du carré *ABCD*. La procédure est la même que précédemment à très peu près.

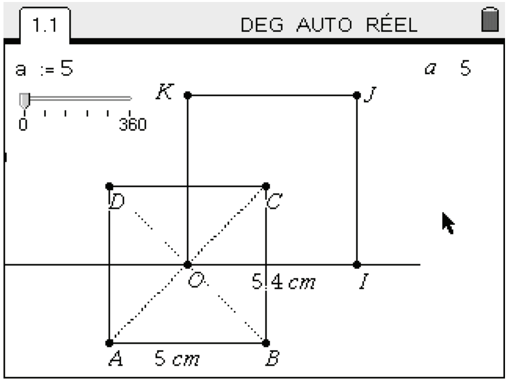


Et c'est là qu'arrive le curseur, pour définir et piloter une variable *a* qui déterminera de combien de degrés on fait tourner le carré *OIJK*.

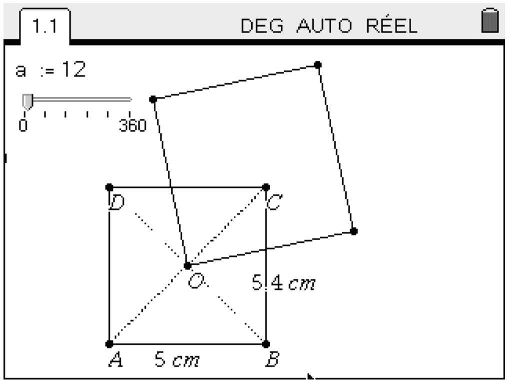
Un curseur se définit avec menu **1: Actions**, **A: Contrôle curseur**. Repositionnons-le dans la partie supérieure gauche de notre feuille : on le saisit avec la main comme on saisirait un point… on le déplace où on veut et on le dépose en cliquant. En se plaçant à l'extrémité du curseur proprement dit, on peut en raccourcir ou en rallonger la longueur : il peut ici être un peu raccourci. Un clic droit (ctrl menu) sur le curseur nous permet d'accéder au menu **Réglages**, que l'on complète comme ci-contre.



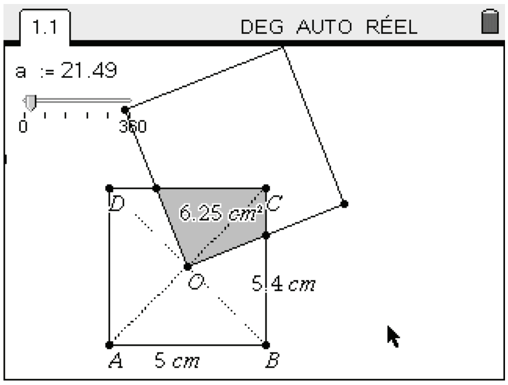
Voilà donc une variable pour définir l'angle d'une rotation ! Mais pour qu'elle soit réutilisable sur la feuille de géométrie, on doit la récupérer comme résultat d'un calcul. On tape (menu 1 6) *a*, qui est le nom de la variable, on en demande le calcul (menu 1 8) et on valide par L, comme l'indique le message de la calculatrice, pour indiquer que c'est bien la variable qu'on veut.



On demande ensuite l'image du **carré** *OIJK* par la rotation de centre *O* et d'angle *a*. Tous les éléments sont disponibles sur la feuille : on clique sur *O* le centre, sur le carré *OIJK* et sur la valeur de *a*. Cachons ensuite le carré *OIJK* et tous les éléments qui permettent d'arriver à la figure ci-contre. Si on anime le curseur (ctrl menu et **Animer**), on constate que le deuxième carré décrit un mouvement de rotation autour du premier, de degré en degré. Mouvement qu'on peut aussi directement commander en déplaçant à la main le curseur.



Intéressons-nous au polygone formé par l'intersection des deux carrés et plus précisément à son aire. Définissons d'abord le polygone (menu 8 4) en cliquant sur chacun des sommets. Remarquons que la calculatrice comprend qu'on vise les points d'intersection, sans qu'il soit nécessaire de les définir avant et les propose en choix. Une fois le polygone défini, on peut en demander son aire… constante quand on fait tourner le deuxième carré… mais las ! Si on bouge le curseur un peu trop loin, les points d'intersection, définis à partir de deux côtés, n'existent plus lorsque l'on arrive sur les autres côtés.



Il faut donc refaire la même construction sur chacune des quatre dispositions possibles. Quand c'est terminé, ce n'est pas si long, nous sommes prêt à lancer l'animation du curseur : on constate bien que l'aire reste la même… égale au quart de l'aire du carré. Une démonstration élémentaire s'appuie sur les rotations et la conservation des aires.

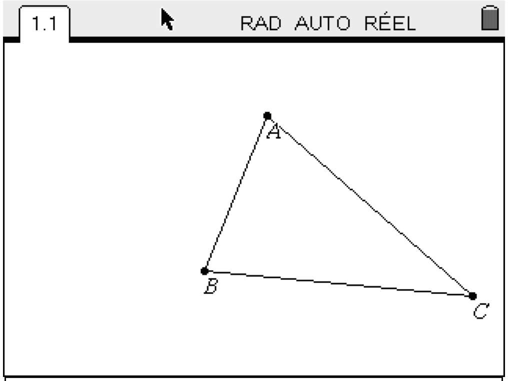
6. Barycentre et calcul vectoriel

Et les vecteurs me direz-vous ? Une seule instruction, **Vecteur**, figure dans le menu **6: Points et droites.** On pourrait croire que c'est bien peu, mais c'est oublier que les transformations (notamment les translations et les homothéties) vont nous permettre de faire quasiment ce que l'on veut.

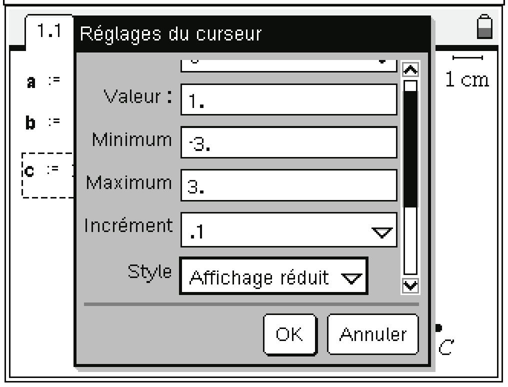
Ainsi, dans l'exercice suivant, nous nous proposons de déterminer le barycentre de trois points pondérés. Une réponse à ce problème, s'appuyant sur les coordonnées, a été proposée dans le forum Univers TI-Nspire par Philippe Fortin à l'adresse suivante :

http://www.univers-TI-Nspire.fr/forum/viewtopic.php?f=6&t=12&p=47#p47.
Nous en proposons ici une autre, strictement équivalente, basée sur une construction vectorielle.

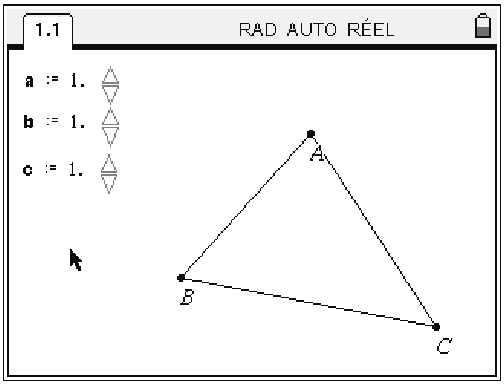
Ouvrons donc un nouveau classeur dans lequel on demande l'affichage du plan géométrique. Dessinons un triangle quelconque *ABC*.



Qui dit barycentre dit coefficients – appelons-les *a*, *b*, *c* – que nous ferons varier entre –3 et 3 par exemples avec des curseurs (contrôle curseur : menu 1 A). Positionnons-les en haut et à gauche de l'écran et procédons pour chaque variable *a*, *b* ou *c* aux réglages indiqués ci-contre. Le style **Affichage réduit** comme son nom l'indique occupe moins de place et est recommandé sur la calculatrice.



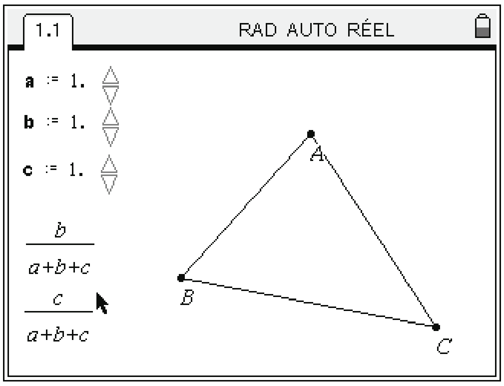
Tout ces préalables exécutés, on dispose de la fenêtre suivante :

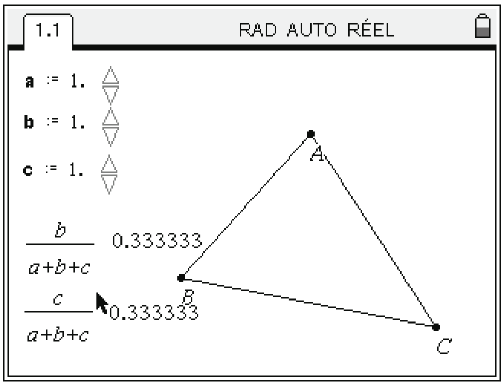


avec trois variables initialisées à 1. Allons-y pour la détermination du barycentre *G* des trois points pondérés (A ; a), (B ; b) et (C ; c), défini comme on le sait par l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}\,.$$

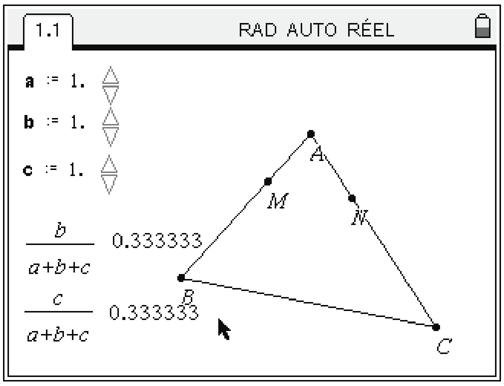
Calculons d'abord les coefficients qui interviennent $\frac{b}{a+b+c}$ et $\frac{c}{a+b+c}$ (menu 1 6 pour entrer les formules puis menu 1 8… en appuyant sur L comme c'est proposé permet d'accepter les variables *a*, *b* et *c* telles qu'elles sont définies par les curseurs).



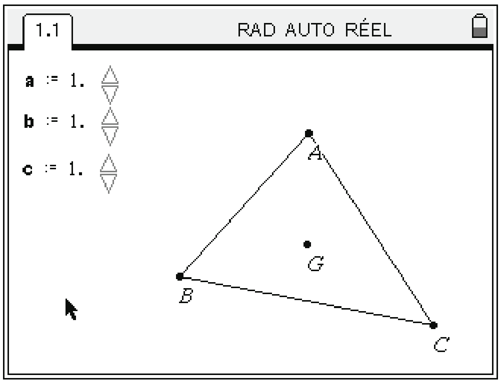


Nous disposons maintenant de tous les éléments nécessaires à la détermination de la somme $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$. Procédons en deux étapes.

Tout d'abord plaçons le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}$ et le point N tel que $\overrightarrow{AN} = \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$. Ces deux points sont les images respectivement de B et C dans une homothétie menu A 5 de centre A et de rapport respectivement $\dfrac{b}{a+b+c}$ et $\dfrac{c}{a+b+c}$. Rappelons que l'on clique en premier sur le centre de l'homothétie.



Enfin il reste à construire la somme des vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$. Il suffit par exemple de déterminer l'image du point M dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AN}$. On définit donc au préalable le vecteur $\overrightarrow{AN}$ par menu, **6: Points et Droites**, **8: Vecteur**. On peut ensuite appliquer la translation avec menu, **A: Transformations**, **3: Translation** et obtenir le point G cherché. On peut cacher les éléments inutiles de la figure pour arriver à ce que présente l'écran ci-contre.



En animant un des curseurs, éventuellement en le faisant bouger à la main, ou même en attribuant à un des curseurs une valeur que l'on choisit, on peut observer comment varie la position du barycentre G par rapport aux trois points A, B et C.

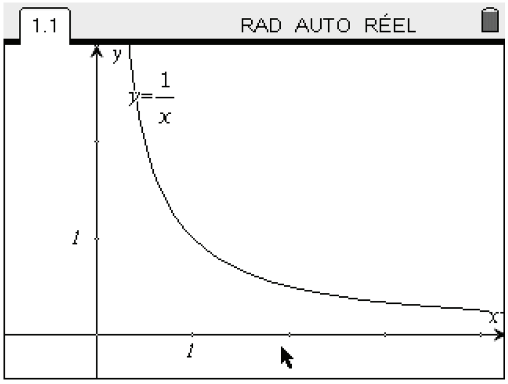
7. Un peu de géométrie analytique

Pour conclure, il est temps d'évoquer la géométrie analytique. À dire vrai, les méthodes développées précédemment s'appliquent aussi avec des objets « analytiques » comme des courbes représentatives de fonctions, notamment placer des points ou déterminer des intersections. La même application est toujours à l'œuvre, à savoir **Graphiques et géométrie**, avec la même logique : c'est ce qui fait la profonde unité et la simplicité de ce logiciel performant. Nous nous proposons donc de montrer, dans les trois exercices qui suivent, quelques-unes des possibilités de **Graphiques et géométrie** dans le cadre de la géométrie analytique.

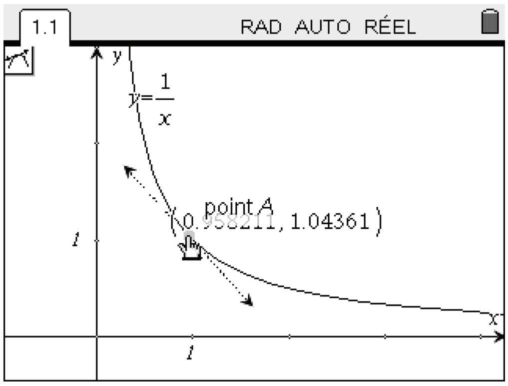
7.1 *Triangle et hyperbole*

Un exercice classique, que l'on peut traiter avec TI-Nspire comme un banal exercice de géométrie. Dans un nouveau classeur, on se place dans l'application **Graphiques et géométrie**. On efface la ligne de saisie (ctrl G).

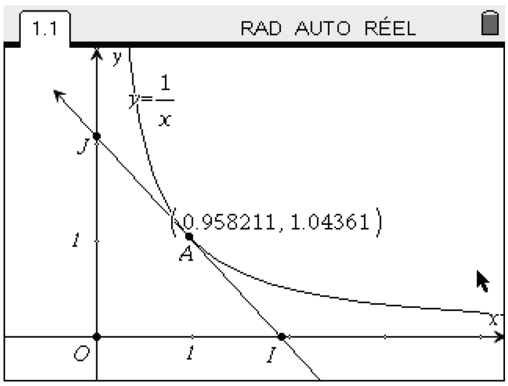
Traçons l'hyperbole d'équation $y = 1/x$ avec l'outil texte : on saisit d'abord (menu 1 6) le texte y=1/x ; on approche ce texte de l'un des axes… la courbe apparaît… on valide en cliquant. Simple et naturel !
Déplaçons la page, en la saisissant (ctrl)
pour positionner le premier quadrant comme ci-contre.
Réglons ensuite les axes à peu près comme ci-contre : il suffit de saisir une des graduations, à n'importe quel endroit de n'importe quel axe, et de la déplacer vers la droite pour agrandir l'unité *simultanément* sur les deux axes (si l'on veut qu'un seul axe soit modifié, on appuie pendant le déplacement sur la touche CAPS … mais le repère ne sera plus orthonormé).
Si l'unité n'est pas 1… c'est même très probable… cliquez sur le nombre et modifiez la valeur à 1.



On place un point A sur cette courbe avec l'outil habituel (menu 6 2 *rien de changé au fond !*) et on trace la tangente à la courbe en A (menu, **6: Points et droites**, **7: Tangente)** : il suffit de cliquer sur le point… comme le point a été positionné sur une *courbe*, c'est bien la tangente à *cette* courbe qui est déterminée. La tangente apparaît avec ses petites flèches usuelles. Signalons qu'elle peut être redimensionnée en la saisissant par une de ses flèches.

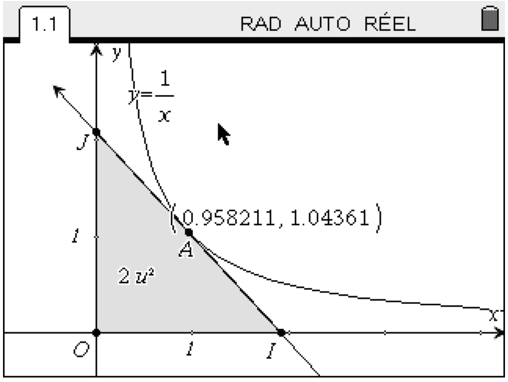


Ici, on appelle I l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses et J avec l'axe des ordonnées (menu 6 3). En demandant les points d'intersection I et J, la tangente est alors automatiquement redimensionnée pour rencontrer effectivement les axes. On peut aussi définir l'origine du repère et l'appeler O. Les différents éléments, les noms des points ou les coordonnées de A, peuvent être saisis et déplacés pour que la figure soit la plus lisible possible.



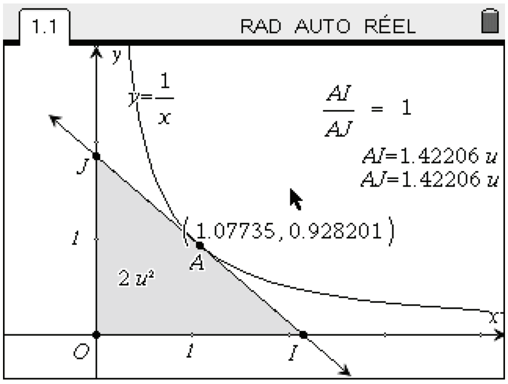
Reste à construire le triangle *OIJ* (menu 8 2) et à demander l'affichage de son aire, après l'avoir grisé (on peut accéder à l'un ou à l'autre par le menu contextuel du triangle ctrl menu).

On constate que, quand *A* décrit la branche d'hyperbole, l'aire du triangle *OIJ* reste constante, égale à 2 unités d'aire.

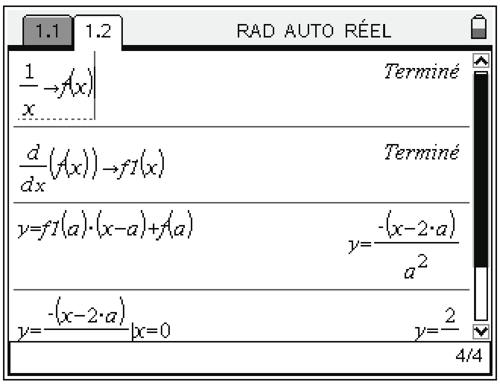


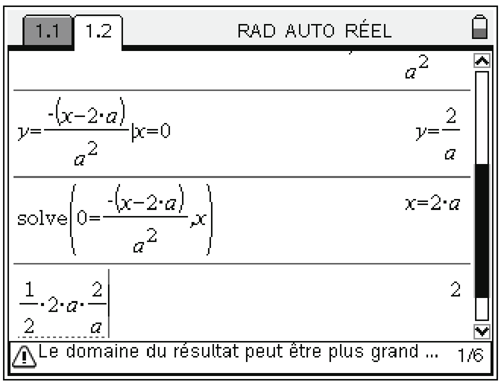
La géométrie dynamique nous pousse à avoir la « conjecture facile », selon une expression de Daniel Perrin… Puisqu'il n'y a qu'à voir ! Le point *A* semble être le milieu de [*IJ*].

Pour confirmer cette impression, demandons le calcul de $\frac{AI}{AJ}$. Rappelons rapidement la démarche : on calcule d'abord la distance de *A* à *I*, puis de *A* à *J* (menu 7 1) ; en cliquant sur les résultats affichés, on ajoute devant *AI*= et *AJ*= (au besoin, faire esc esc au préalable). Enfin avec menu 1 6, on saisit $\frac{AI}{AJ}$ et on en demande le calcul, menu 1 8, en cliquant sur les valeurs respectives de *AI* et de *AJ*. Un signe = rajouté (menu 1 6) entre le calcul et son résultat n'est pas inutile… On arrive finalement à l'écran suivant :



Toutes ces conjectures se démontrent facilement, dès qu'on est capable de préciser la pente de la tangente à la courbe au point *A*. Une vérification « calcul formel » se fait très rapidement. Insérons par exemple une page **Calculs** dans notre classeur. Le lecteur retrouvera les coordonnées de *I* et de *J* et en déduira sans peine les démonstrations des conjectures faites.

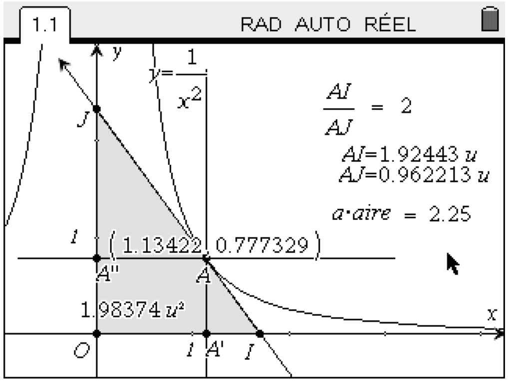




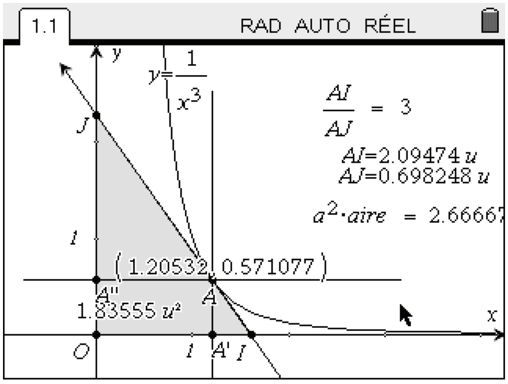
Allons un peu plus loin… que se passe-t-il quand on change de courbe ? Par exemple avec $y=1/x^2$ (il suffit de cliquer sur l'équation et de rajouter l'exposant au bon endroit).

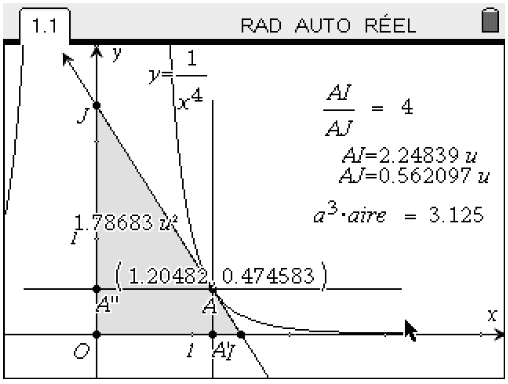
L'aire n'est plus conservée… Le point A n'est plus le milieu de $[IJ]$… mais à mieux y regarder, on constate que le rapport AI/AJ reste constant, cette fois-ci égal à 2… Et en multipliant l'aire par a, l'abscisse de A… on obtient un résultat constant égal à sans doute 5/4…

Derrière le chaos apparent, demeurent des régularités très fortes.



Ces résultats subsistent-ils lorsqu'on augmente l'exposant ?





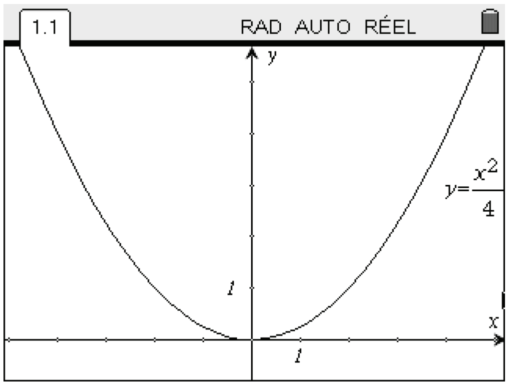
Les quotients AI/AJ sont conformes à ce qu'on attendait. Cette fois-ci, c'est a^2. *aire* qui est constant et vaut sans doute 8/3, puis a^3. *aire* qui est constant et vaut 25/8… Autant de conjecture suggérées par le logiciel et qu'il faut prouver pour les valider…

7.2 *Une parabole et ses tangentes*

Construisons tout d'abord la parabole d'équation $y=\frac{1}{4}x^2$, comme nous l'avons fait précédemment

Menu texte : menu 1 6. On saisit d'abord le texte $y=\frac{x^2}{4}$ et l'on approche de l'un des axes… jusqu'à ce que la courbe apparaisse, on valide en cliquant.

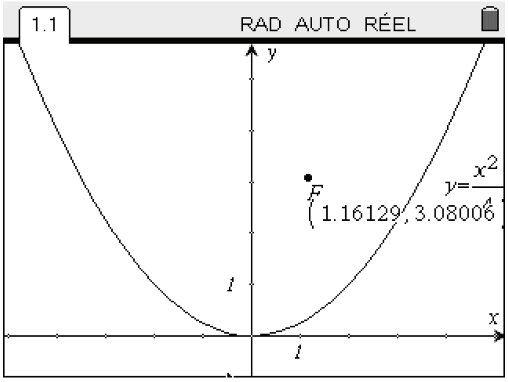
De même, on déplace la page et on règle les axes à peu près comme ci-contre. Faites aussi apparaître le 1 dans l'unité…

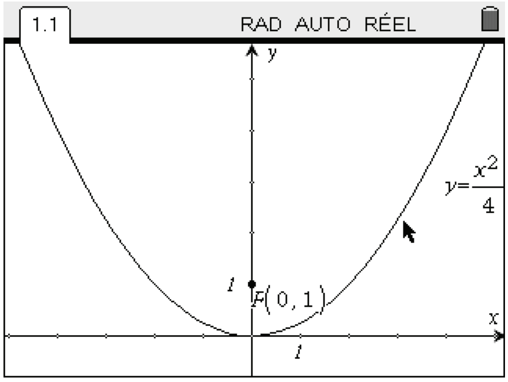


Plaçons le point F de coordonnées (0,1). On doit pouvoir l'obtenir exactement en visant le plus près possible de l'endroit où il doit se trouver avec menu 6 1. Sinon une autre possibilité, qu'on met assez souvent en œuvre en géométrie analytique, consiste

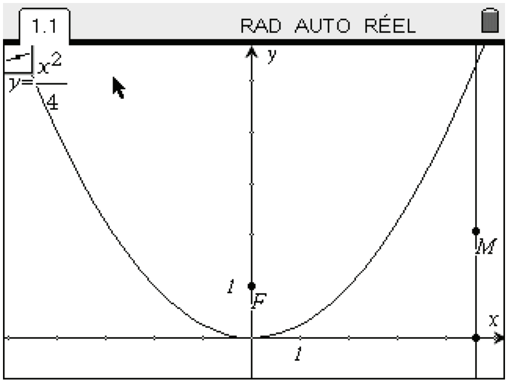
- à placer le point F n'importe où,
- à demander l'affichage de ses coordonnées (menu contextuel du point par exemple ctrl menu),

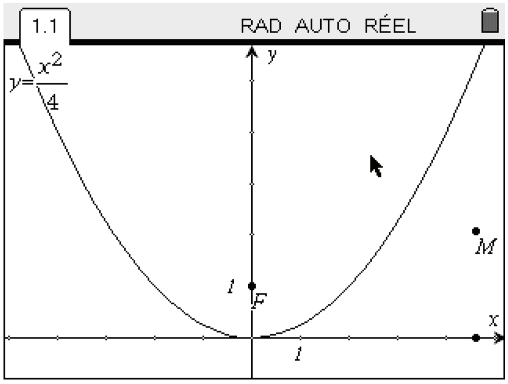
- puis à modifier ses coordonnées en cliquant dessus et en introduisant à la place des anciennes celles que l'on souhaite (au besoin penser à faire esc esc).



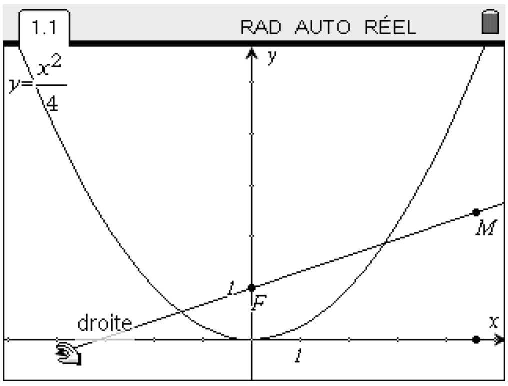


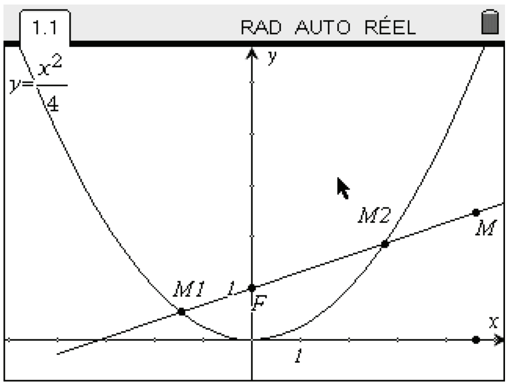
On veut maintenant faire passer une droite variable par le point *F*. Pour mieux piloter cette droite, on place (menu 9 1) une droite perpendiculaire à l'axe des abscisses dans la partie droite de l'écran, sur laquelle on place un point *M* (menu 6 2). La droite peut être cachée, ainsi que les coordonnées de *F* d'ailleurs (menu 1 3).

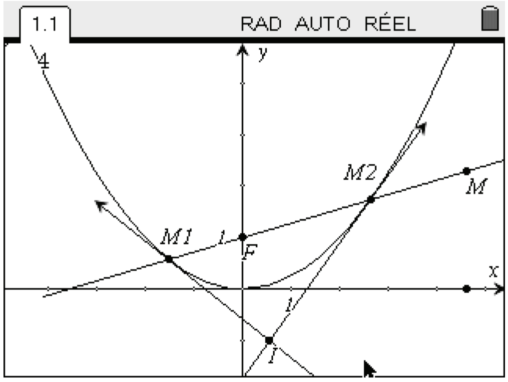




On trace alors la droite (*FM*) (menu 6 4), qui représente bien une droite variable (non verticale) passant par le point *F*. Remarquons qu'une droite « trop courte » peut être « rallongée » en la saisissant par une de ses extrémités, qui devient alors une petite flèche, que l'on peut déplacer.
Cette droite coupe la parabole en deux points *M*1 et *M*2 (menu 6 3).

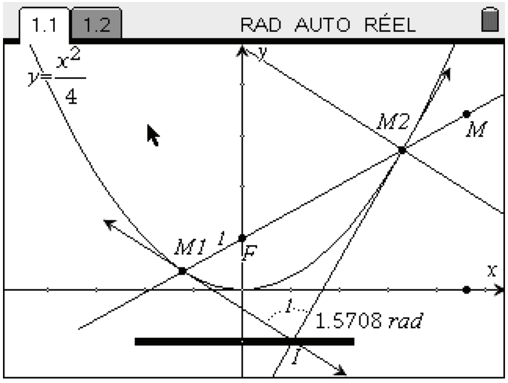






Traçons les tangentes à la parabole en $M1$ et en $M2$ (menu 6 7)… ces deux tangentes se coupent en un point I (menu 6 3).

On demande le lieu du point I quand la droite (MF) varie, c'est-à-dire d'après notre figure, lorsque le point M se déplace sur la droite verticale : il semble que cela soit la droite d'équation $y = -1$. On constate aussi que l'angle $\widehat{M_1IM_2}$ est droit…



Les démonstrations de ces résultats sont classiques et ne posent aucun problème particulier.

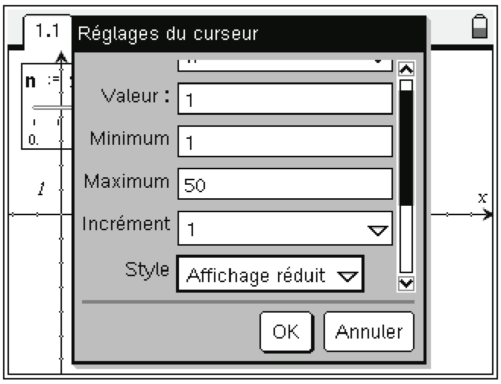
7.3 *De la suite dans les idées*

On peut même aborder des situations ne relevant plus exclusivement de la géométrie analytique, comme l'étude d'une suite par exemple.
n étant un entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie pour tout réel $x > 0$ par :

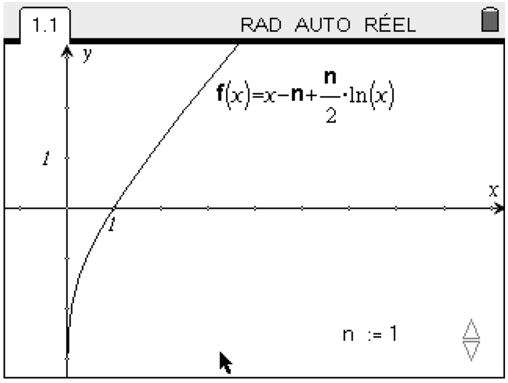
$$f_n(x) = x - n + \frac{n}{2}\ln x.$$

La représentation graphique s'obtient facilement : nouveau classeur, **Graphiques et géométrie** ; comme la fonction n'est définie que sur $]0\,;+\infty[$, on peut déplacer le repère jusqu'à la gauche de l'écran en saisissant la feuille avec (ctrl).

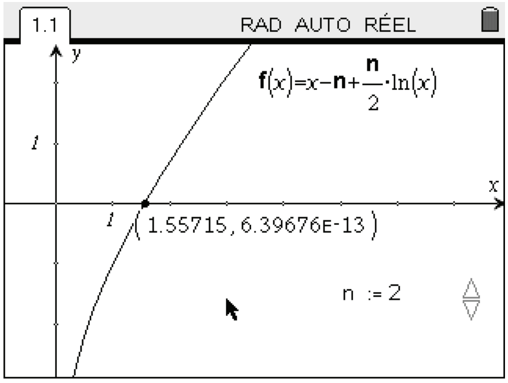
Préalablement à la formule, la variable n doit être définie. Il est possible de le faire par l'intermédiaire d'un curseur (menu 1 A) dont les caractéristiques sont données ci-contre. Positionnons ce curseur en bas et à droite de l'écran.



Dans la ligne de saisie on peut alors introduire la formule qui définit la fonction : rappelons qu'en allant effacer le **1** de **f1(x)**, on peut tout à fait l'appeler **f**. En saisissant les graduations de l'axe des abscisses, on modifie les paramètres de la fenêtre, comme proposé ci-contre (les graduations de l'axe des ordonnées bougent aussi en conservant un repère orthonormé, comme au départ… sauf si, en déplaçant les graduations de l'axe des abscisses, on appuie sur la touche ⇧).



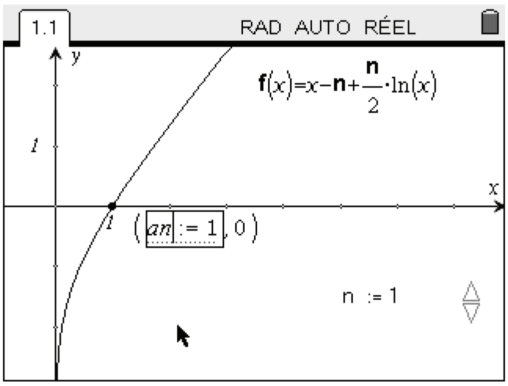
En faisant varier n et au besoin le zoom, on constate que la fonction semble croissante sur $]0\,;+\infty[$ et que sa courbe représentative coupe l'axe des abscisses en un seul point dont l'abscisse est notée a_n. La démonstration en est laissée au soin du lecteur. Intéressons-nous à la suite (a_n).

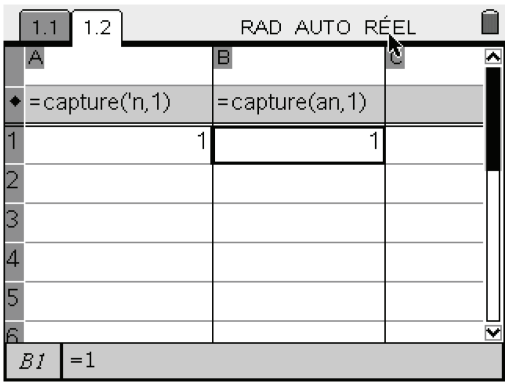


Le point d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses s'obtient avec menu **6: Points et droites**, **3: Point d'intersection**. Demandons l'affichage de ses coordonnées (ctrl menu et **Coordonnées**).

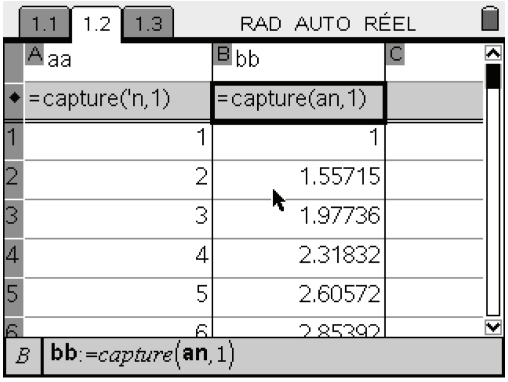
L'abscisse obtenue donne donc la valeur de a_n. Avec le curseur, on récupère des valeurs successives de la suite (a_n) et les n qui correspondent.

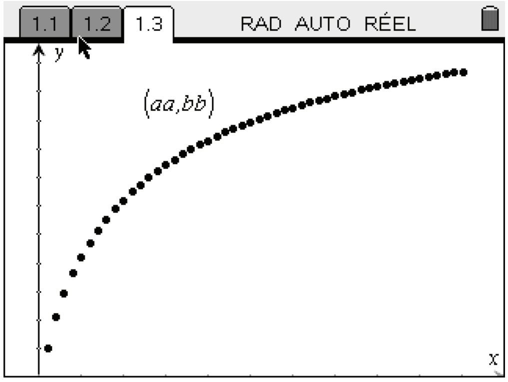
Pourquoi ne pas capturer ces données ? D'autant que la variable **n** est déjà définie ; il reste à appeler par exemple **an** l'abscisse du point. On ouvre ensuite une page **Listes et tableur** et on complète les zones grisées comme ci-dessous.





L'animation du curseur permet de compléter les colonnes. En nommant les colonnes **aa** et **bb**, on peut aussi obtenir la représentation graphique du nuage de points de la suite :





Suffisamment d'éléments pour constater que la suite semble strictement croissante et majorée… trouver un majorant n'est alors qu'un jeu d'enfant. La suite est donc convergente et converge vers … e^2 (penser en particulier que pour tout entier n, $\ln a_n = \frac{2}{n}(n - a_n)$ soit $\ln a_n = 2 - \frac{2a_n}{n}$.

Nous voici au terme de ce chapitre d'initiation… J'espère simplement que le lecteur qui m'aura suivi, avec sa calculatrice sur le coin du bureau, disposera du bagage de base qui lui permettra d'expérimenter ses *propres* exercices. Qu'il se lance donc, qu'il essaie d'utiliser le plus souvent possible ce bel outil !