10

Chapitre

Équations différentielles

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser plus particulièrement aux possibilités offertes par la TI-Nspire CAS pour la résolution d'équations différentielles linéaires, puis pour la résolution de systèmes différentiels linéaires.

Sommaire

1. Résolution pas à pas d'une équation différentielle

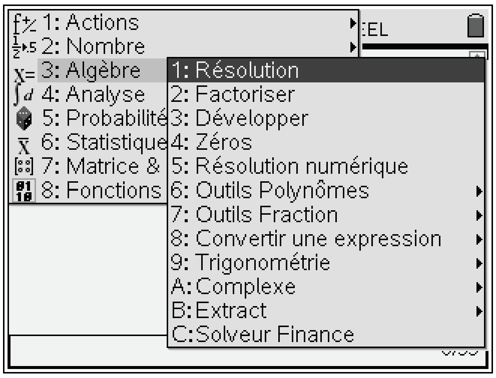
Nous allons étudier ici l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = \cos(3x)$.

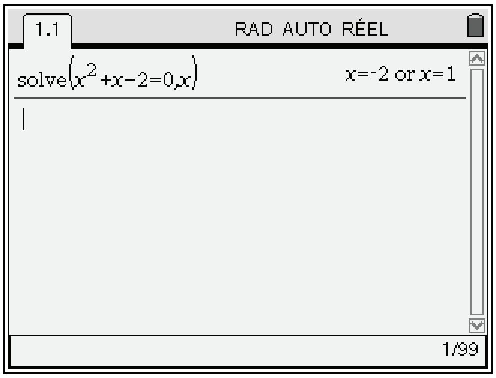
Comme nous le verrons dans la suite, la TI-Nspire CAS sait résoudre directement cette équation, mais dans certains cas, le but d'un exercice est précisément de s'assurer que l'on a bien assimilé les méthodes à utiliser.

Pourquoi ne pas le faire ici, tout en laissant le soin à la calculatrice de faire pour nous les calculs un peu fastidieux ?

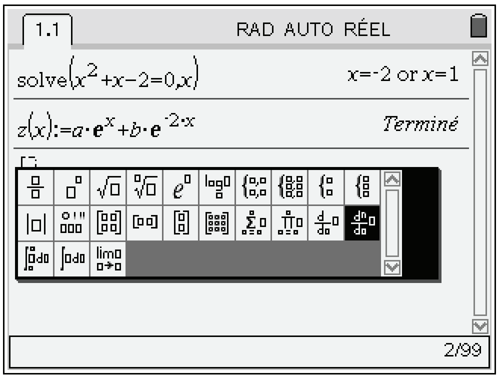
1.1 *Résolution de l'équation homogène*

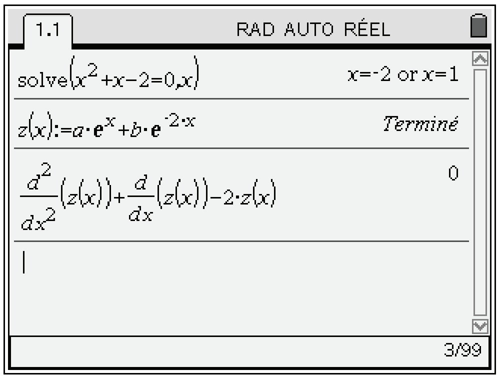
On doit tout d'abord rechercher les solutions de l'équation homogène, et pour cela résoudre l'équation caractéristique $x^2 + x - 2 = 0$:





Nous savons que les solutions sont alors du type $z(x) = Ae^{x} + Be^{-2x}$. Vérifions-le :



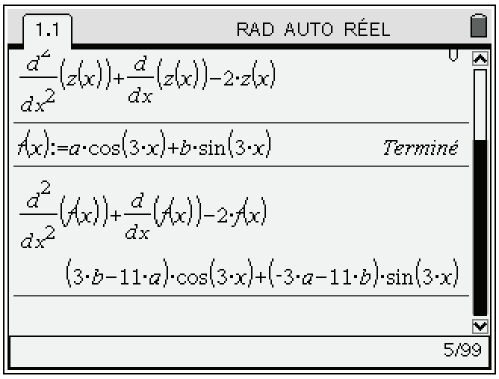


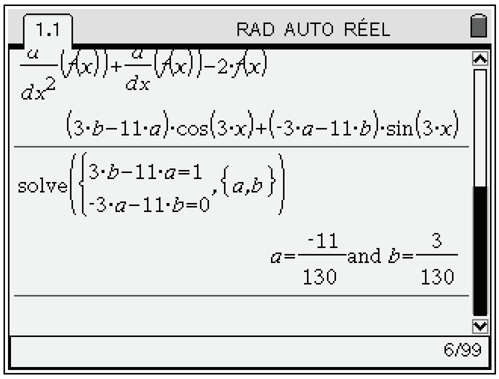
1.2 *Solution particulière*

Il reste à trouver une solution particulière de l'équation complète $y'' + y' - 2y = \cos(3x)$.

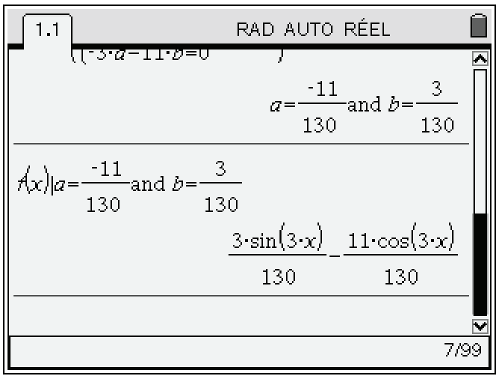
D'après le cours, nous savons que l'on peut chercher cette solution sous la forme $f(x) = a\cos(3x) + b\sin(3x)$.
(C'est vrai car 3 n'est pas solution de l'équation $x^2 + x - 2 = 0$).
On peut calculer la valeur de $f''(x) + 2f'(x) - 2f(x)$, puis résoudre le système $\begin{cases} 3b - 11a = 1 \\ -3a - 11b = 0 \end{cases}$ que l'on obtient en identifiant l'expression obtenue lors du calcul $f''(x) + 2f'(x) - 2f(x)$ avec $\cos(3x)$.

© T³ France 2008 / Photocopie autorisée

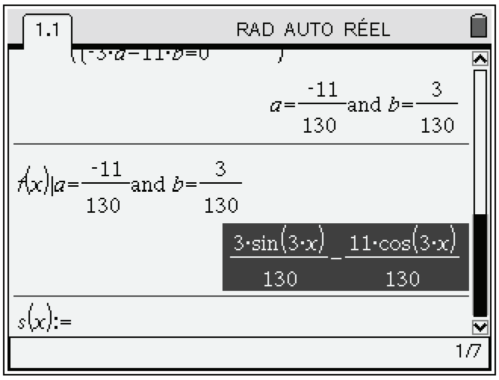


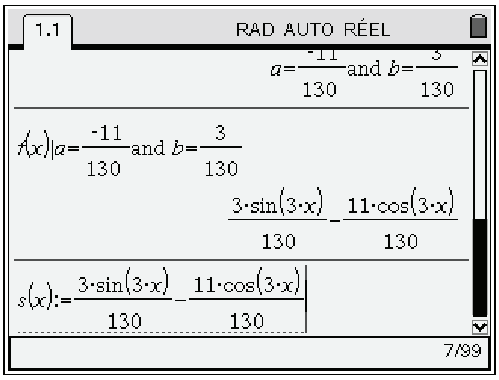


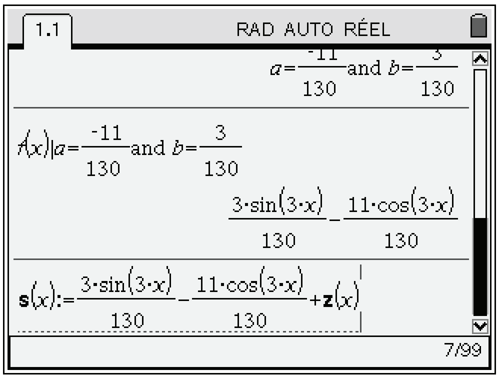
Il suffit ensuite de demander la valeur de $f(x)$ en tenant compte du dernier résultat :

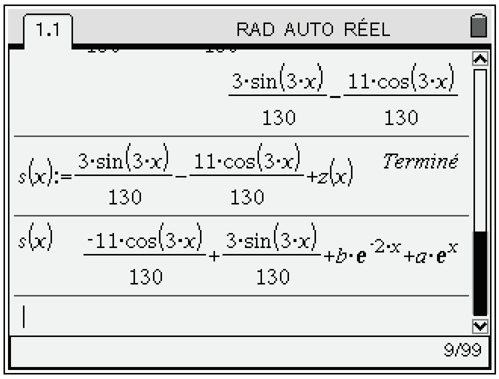


On peut ensuite construire la solution en ajoutant ce résultat à l'expression de la solution générale de l'équation homogène, présente un peu plus haut dans l'historique des calculs, et utiliser cette somme pour définir une fonction s :







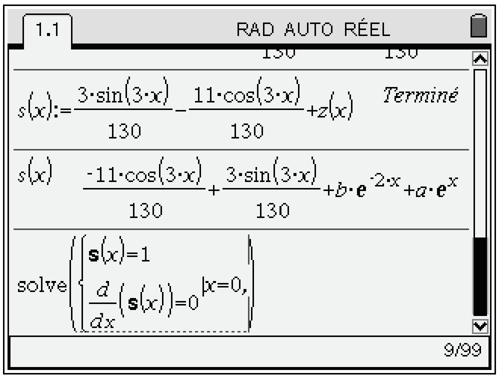


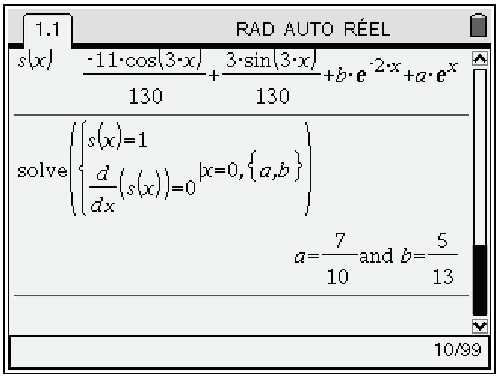
© T³ France 2008 / Photocopie autorisée

1.3 *Solution avec conditions initiales*

On peut maintenant déterminer a et b si on impose des conditions initiales.

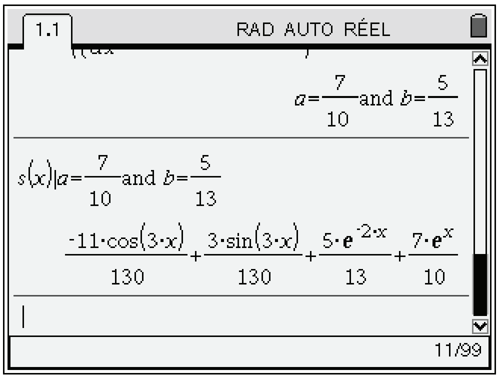
Supposons que l'on cherche par exemple à avoir $s(0)=1$ et $s'(0)=0$. Il suffit de résoudre le système que l'on obtient avec ces deux conditions :

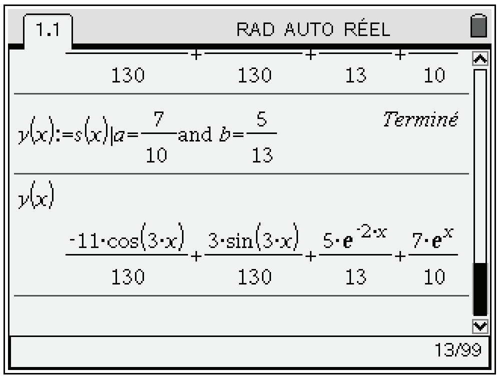




On peut ensuite demander l'expression de $s(x)$ en tenant compte de ces valeurs de a et b.

Il est également possible d'utiliser ces deux valeurs pour définir une fonction (écran de droite) :



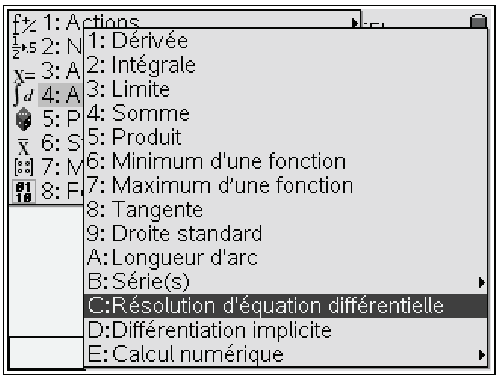


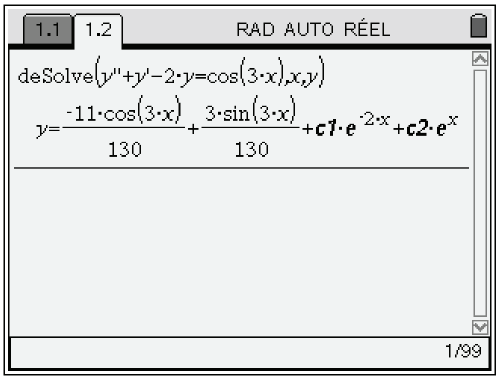
2. Résolution directe d'une équation différentielle

2.1 *Solution générale*

Reprenons l'exemple précédent $y''+y'-2y=\cos(3x)$. Cette fois nous voulons obtenir directement l'expression de la solution générale. Il suffit d'utiliser la fonction **deSolve** :

```
deSolve(y''+y'-2y=cos(3x),x,y)
```



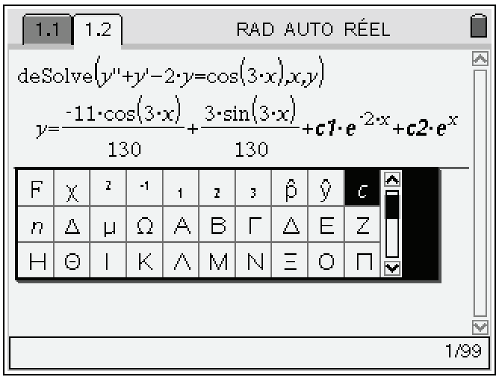


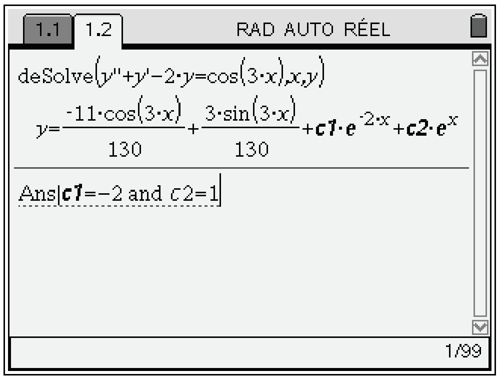
© T³ France 2008 / Photocopie autorisée

☞ *Pour entrer la dérivée seconde, on utilise deux fois le signe* **'**.

☞ *Dans l'expression des solutions, les deux constantes arbitraires sont désignées par c1 et c2. Si vous effectuez une seconde résolution vous obtiendrez c3 et c4, et ainsi de suite….*

La lettre ***c*** en italique qui est utilisée pour noter ces constantes est accessible dans la table des caractères. Pour remplacer les constantes par des lettres spécifiques, par exemple *a* et *b*, il suffit par exemple d'entrer une instruction du type : `...| c1 = ... and c2 = ...`



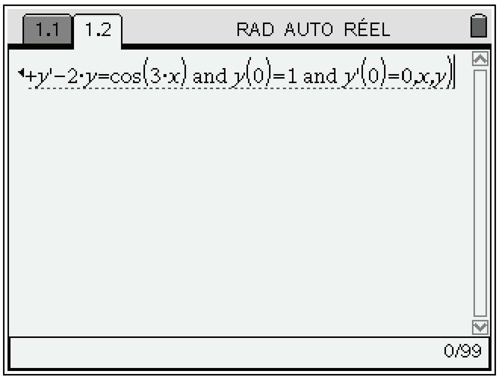


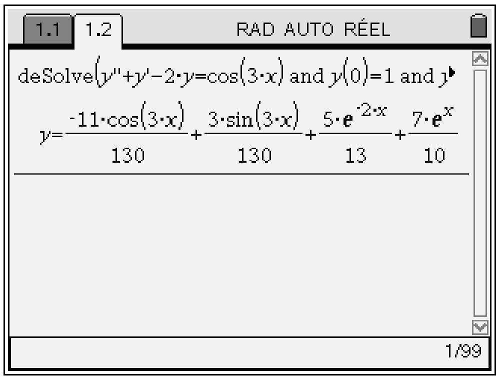
☞ *Attention à bien utiliser le caractère spécial* ***c*** *disponible dans la table des caractères, et non le c obtenu avec la touche alphabétique.*

2.2 *Recherche directe d'une solution vérifiant des conditions initiales*

Pour déterminer directement les solutions de cette équation différentielle avec conditions initiales, il suffit de les inclure lorsque l'on entre l'équation. Ici, on écrira :

`deSolve(y''+y'−2y=cos(3x) and y(0)=1 and y'(0)=0,x,y)`





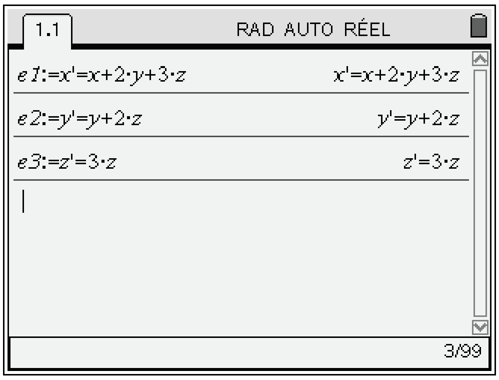
C'est bien l'expression de la solution obtenue lors de la méthode de résolution pas à pas.

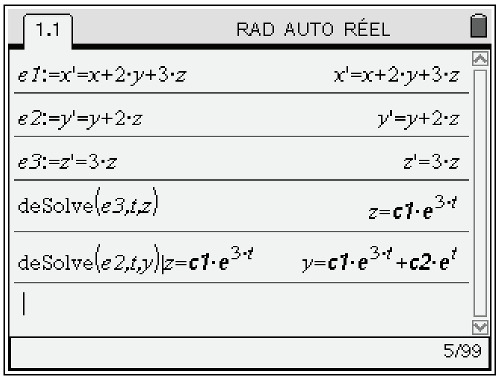
© T³ France 2008 / Photocopie autorisée

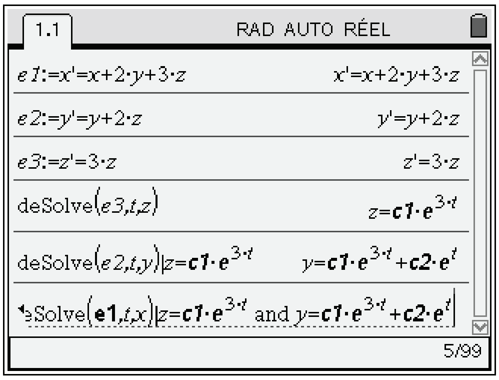
3. Résolution d'un système triangulaire par substitutions

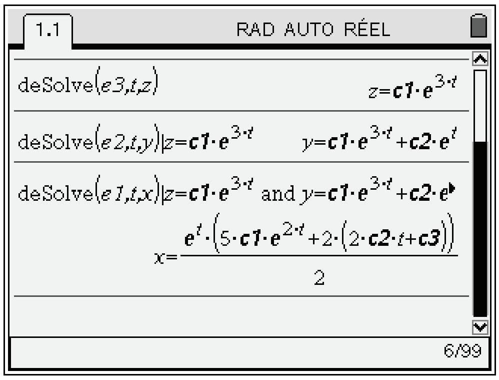
La fonction **deSolve** permet aussi de résoudre les systèmes différentiels triangulaires :

Voici par exemple la résolution du système $\begin{cases} x' = x + 2y + 3z \\ y' = y + 2z \\ z' = 3z \end{cases}$:







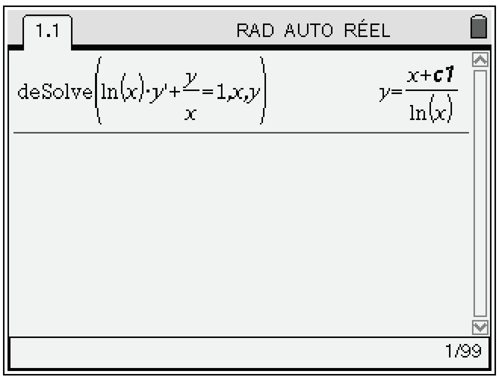


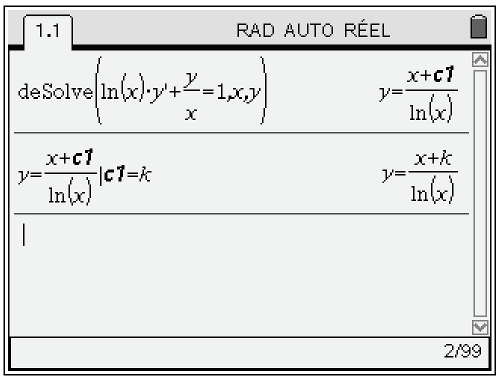
4. Étude du raccordement des solutions

Nous allons résoudre l'exercice suivant, posé à l'oral d'entrée dans une école d'ingénieurs :

> Résoudre, dans $]0,+\infty[$, l'équation différentielle $y'\ln(x) + \dfrac{y}{x} = 1$.

D'après le cours, nous savons qu'une équation de ce type admet des solutions sur chacun des intervalles $I_1 =]0,1[$ et $I_2 =]1,+\infty[$. La TI-Nspire CAS est effectivement capable de nous fournir la forme générale de ces solutions.





© T³ France 2008 / Photocopie autorisée

Sur chaque intervalle I_k, les solutions sont du type $f(x) = \dfrac{x + \lambda_k}{\ln(x)}$.

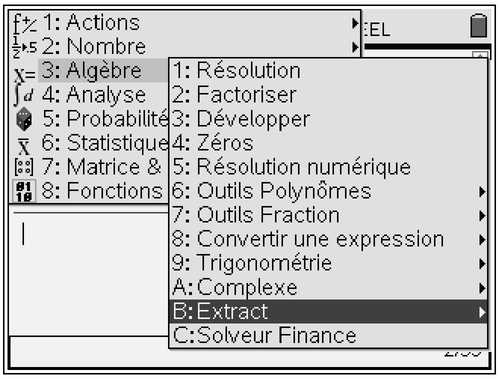
Il reste maintenant à voir si l'on peut déterminer λ_1 et λ_2 tels que l'on puisse raccorder ces solutions. Il faut pour cela que les limites à droite et à gauche de f en 1 soient finies, et égales, ce qui assura l'existence d'un prolongement par continuité.

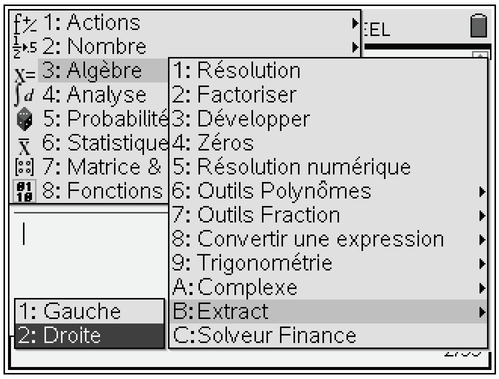
Il restera à vérifier que ce prolongement est bien dérivable en 1.

Pour la suite, il serait utile de définir y comme une fonction de x en utilisant l'égalité obtenue. Voici deux façons de le faire, permettant chacune de découvrir quelques méthodes d'utilisation de la TI-Nspire CAS.

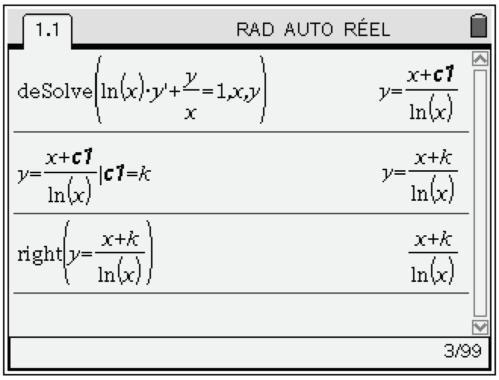
La première méthode part de l'utilisation de la fonction **right**, à laquelle on peut accéder en sélectionnant **Droite** dans le menu **Extract** du menu **Algebre**.

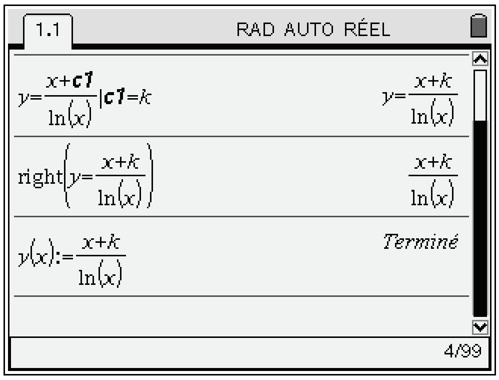
1. On colle cette instruction dans la ligne d'édition :





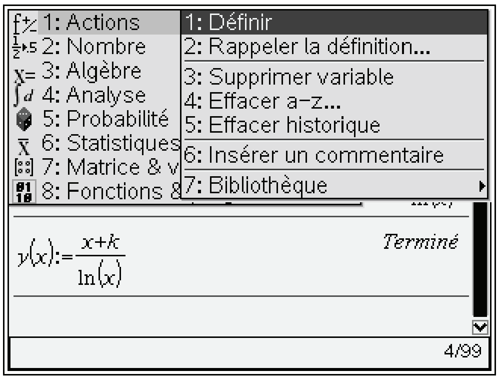
2. Celle-ci permet de récupérer le terme de droite de l'égalité, puis de l'utiliser pour définir notre fonction :

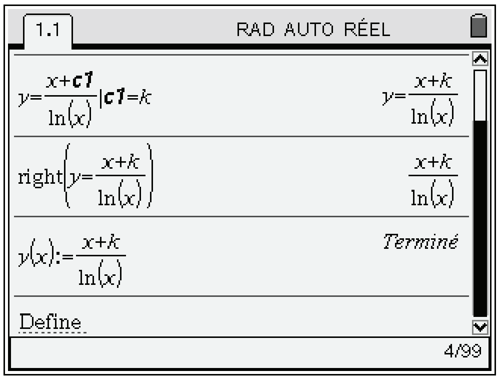




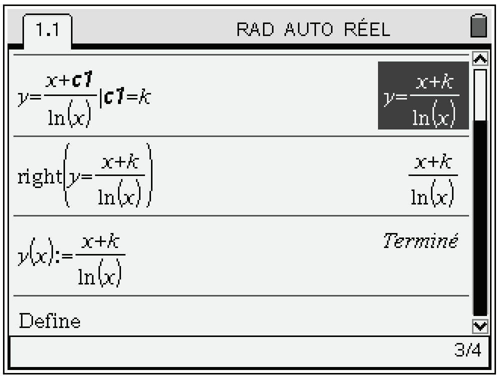
Dans la seconde méthode, on utilise l'instruction **Define**, à laquelle on accède en sélectionnant **Définir** dans le menu **Actions** :

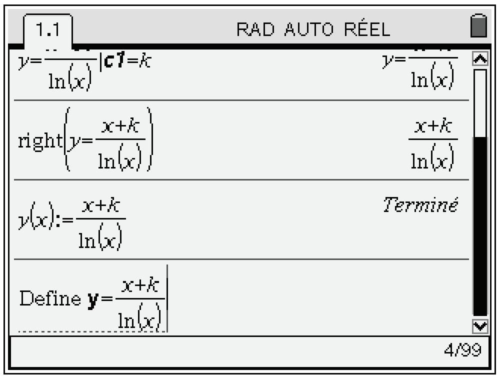
1. On insère cette instruction au début de la ligne d'édition :



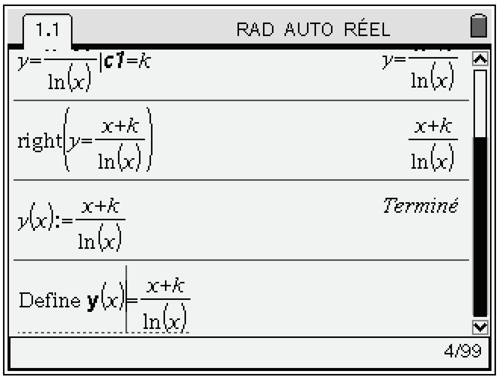


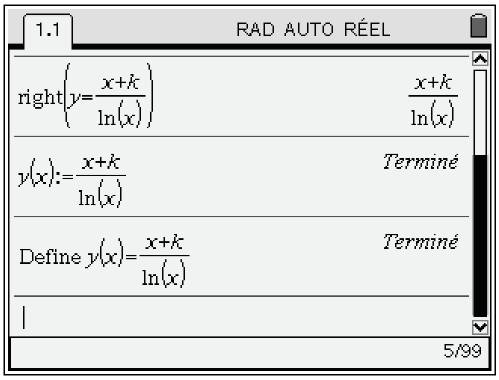
2. Ensuite, on "va chercher" l'égalité définissant y dans l'historique des calculs, et on la recopie dans la ligne d'édition en appuyant sur enter :





3. Il reste ensuite à insérer **(x)** dans la ligne d'édition pour compléter l'instruction permettant de définir y comme une fonction de x :

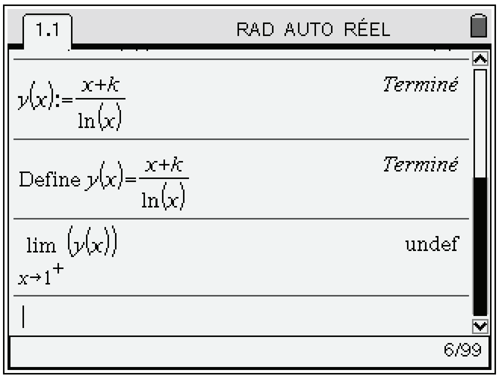


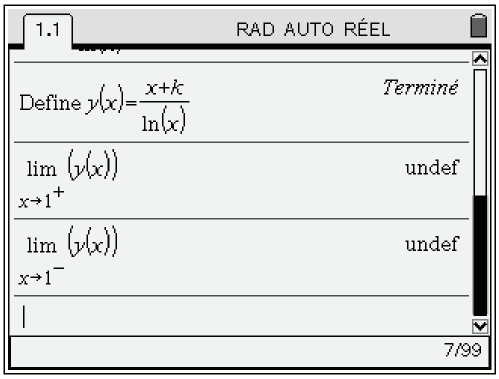


À vous de choisir la méthode qui vous convient le mieux…

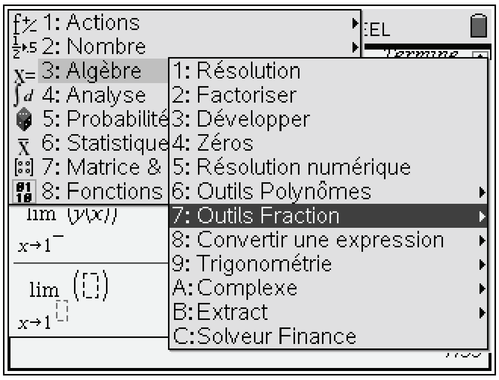
© T³ France 2008 / Photocopie autorisée

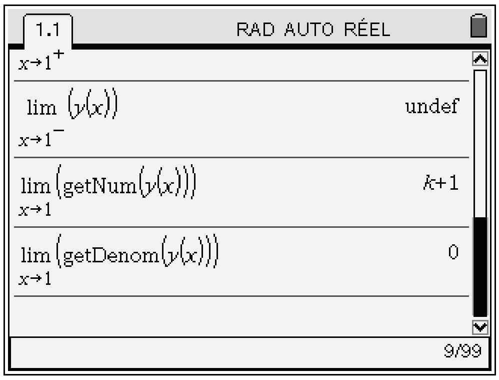
En raison de la présence d'un paramètre, la calculatrice ne peut pas déterminer les limites de $y(x)$ à gauche et à droite en 1 :





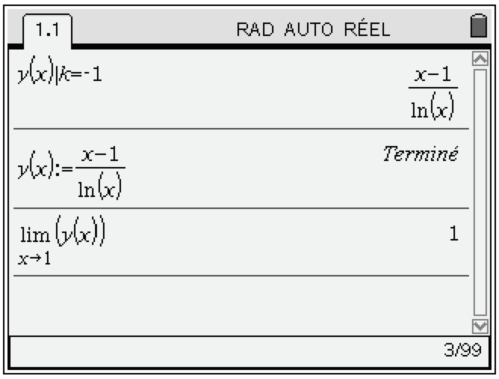
Bref, il va falloir réfléchir un peu… la limite du numérateur est égale à $1+k$, celle du dénominateur est nulle. Ici, c'est immédiat, mais on pourrait utiliser les fonctions **getNum** et **getDen**, présentes dans le sous-menu **Outils Fraction** :





Pour avoir une limite finie, il est donc nécessaire que $k=-1$.

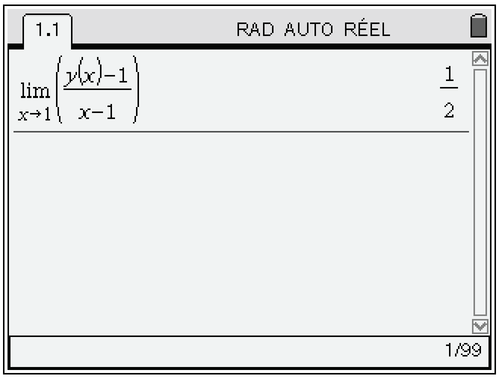
On peut cette fois reprendre le calcul avec la TI-Nspire CAS :



Il reste à montrer la dérivabilité.

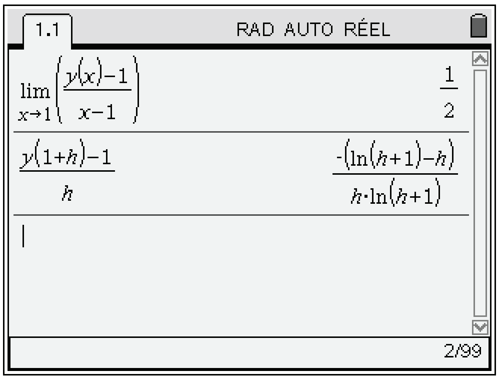
Étudions par exemple la limite du quotient $\dfrac{y(x)-1}{x-1}$.

© T³ France 2008 / Photocopie autorisée

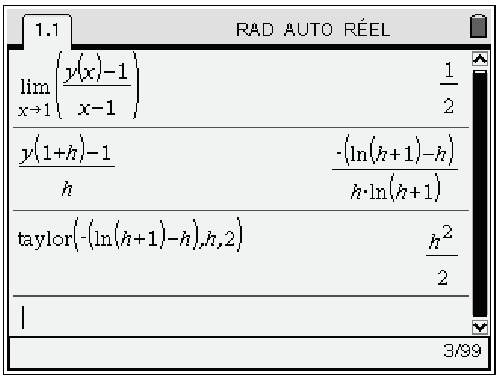


Si la TI-Nspire CAS ne se trompe pas, la fonction est bien dérivable et $y'(1)=\dfrac{1}{2}$.

Il n'est pas très difficile de justifier ce résultat. Calculons $\dfrac{y(1+h)-1}{h}$:



On peut alors faire un DL2 du numérateur :



Et procéder de même pour le dénominateur, ou utiliser directement l'équivalent $\ln(1+h)\sim h$ et donc $h\ln(1+h)\sim h^2$.

Notre quotient est donc équivalent à $\dfrac{1}{2}$, ce qui justifie la limite obtenue.

En conclusion, la fonction $y(x)=\dfrac{x-1}{\ln(x)}$ est bien prolongeable en une fonction dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

☞ *On pourrait en fait montrer que ce prolongement est C^{∞} en utilisant un développement en série entière de* $\ln(1+h)$.

© T³ France 2008 / Photocopie autorisée

5. Recherche d'une solution DSE

Dans de nombreux cas il n'est pas possible d'obtenir une expression symbolique de la solution d'une équation différentielle.

L'une des méthodes utilisables dans ce cas est de rechercher un développement en série entière d'une solution.

C'est une question classique aux concours d'entrée en école d'ingénieurs.

Considérons par exemple l'équation $4x(1-x)y''+2(1-3x)y'-y=0$.

Nous vous renvoyons à votre cours pour les détails de la résolution.

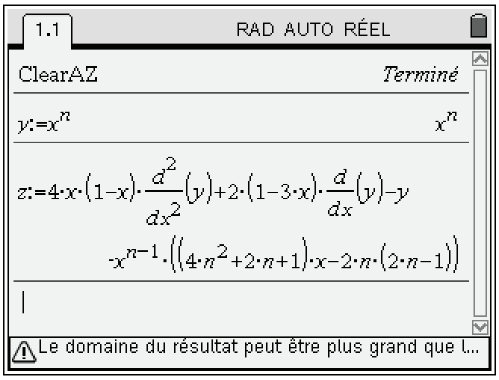
Un point particulièrement important va consister à remplacer y par $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, dans $4x(1-x)y''+2(1-3x)y'-y$, à dériver terme à terme, ce qui est licite si on se place à l'intérieur du disque de convergence de la série, et à obtenir un résultat du type $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ que l'on identifiera avec le second membre qui est ici égal à 0.

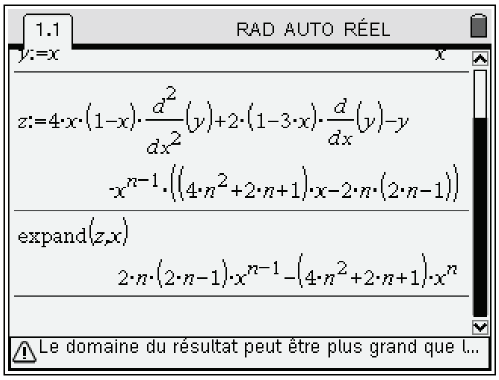
Il est clair que la TI-Nspire CAS ne permet pas de faire tout cela directement. Elle peut cependant vous aider à éviter quelques erreurs dans vos calculs.

Voici comment procéder.

On définit $y=x^n$, puis $z=4x\cdot(1-x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+2(1-3x)\dfrac{dy}{dx}-y$ (écran de gauche).

En utilisant la fonction **expand** avec x comme deuxième argument, on peut demander de développer en regroupant les termes en fonction de x (écran de droite) :





On a obtenu $2n(2n-1)x^{n-1}-\left(4n^2+2n+1\right)x^n$.

Lorsque l'on remplace y par $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ dans le premier membre de l'équation, on obtient donc

$$A=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2n(2n-1)a_n x^{n-1}-\left(4n^2+2n+1\right)a_n x^n\right).$$

☞ *Le terme en* x^{n-1} *ne pose pas de problème pour* $n=0$, *car le coefficient* $2n(n-1)$ *est nul pour cette valeur de n. Il est donc équivalent de faire la somme des termes* $2n(2n-1)x^{n-1}$ *à partir de* 0 *ou de* 1.

Il ne reste plus qu'à jouer un peu avec les indices :

© T³ France 2008 / Photocopie autorisée

$$A=\sum_{n=0}^{+\infty} 2n(2n-1)a_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(4n^2+2n+1\right)a_n x^n$$

$$A=\sum_{n=1}^{+\infty} 2n(2n-1)a_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(4n^2+2n+1\right)a_n x^n$$

$$A=\sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)(2(n+1)-1)a_{n+1} x^{n}-\sum_{n=0}^{+\infty}\left(4n^2+2n+1\right)a_n x^n$$

Cette série sera égale à la fonction nulle si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ 2(n+1)(2(n+1)-1)a_{n+1}-\left(4n^2+2n+1\right)a_n=0.$$

D'où la condition :

$$a_{n+1}=\frac{4n^2+2n+1}{2(n+1)(2n+1)}a_n$$

Ce qui permet donc de montrer que l'on obtient une série entière dont le rayon de convergence est égal à 1, et de calculer a_n à partir de $a_0=f(0)$.

6. Résolution des systèmes différentiels diagonalisables assistée par la TI-Nspire CAS

Nous allons étudier ici une méthode de résolution, assistée par la calculatrice, pour les systèmes du type $X'=A\cdot X+B$ lorsque A est diagonalisable.

6.1 *Résolution du système homogène*

Dans les cas des systèmes homogènes associés à une matrice diagonalisable, on obtient une base de solutions en multipliant les vecteurs propres associés à λ par $e^{\lambda t}$.

Considérons par exemple le système suivant :

$$\begin{cases} x'=2x+y+z \\ y'=x+2y+z \\ z'=x+2y+2z \end{cases}$$

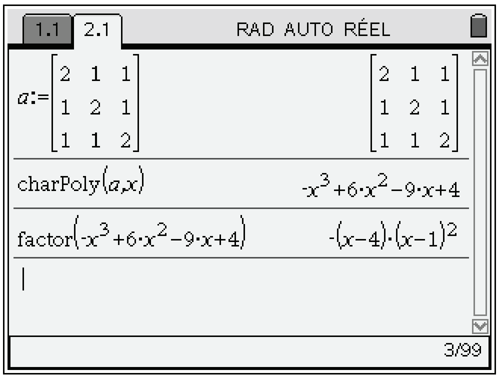
La matrice associée à ce système est $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

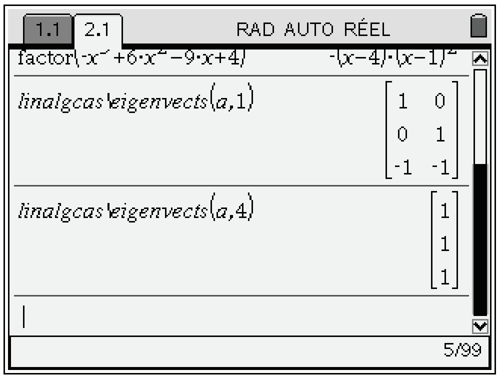
La matrice A est diagonalisable, ses valeurs propres sont 1 et 4.

Une base de l'espace propre E_1 est formée par $u_1=(1,-1,0)$ et $u_2=(1,0,-1)$. Une base de l'espace propre E_2 est formée par $u_3=(1,1,1)$.

Tout cela peut se démontrer facilement, en particulier en utilisant les fonctions et programmes de la bibliothèque **linalgcas**, que vous pourrez télécharger sur le site **www.univers-ti-nspire.fr**.

© T³ France 2008 / Photocopie autorisée





☞ *Voir* **chapitre 9** *pour plus d'information sur l'utilisation de ces fonctions.*

On obtient alors une base de solutions du système homogène $X' = A \cdot X$ en considérant

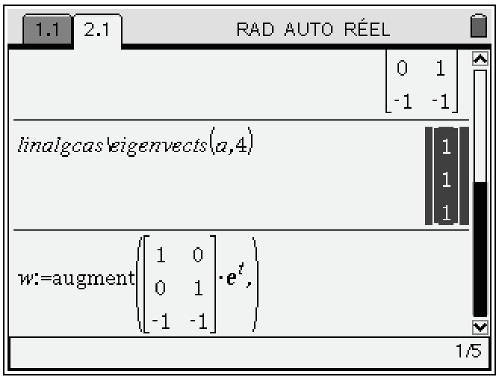
$$a(t) = e^t \cdot u_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \\ 0 \end{pmatrix},\ b(t) = e^t \cdot u_2 = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ -e^t \end{pmatrix},\ c(t) = e^{4t} \cdot u_3 = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \\ e^{4t} \end{pmatrix}$$

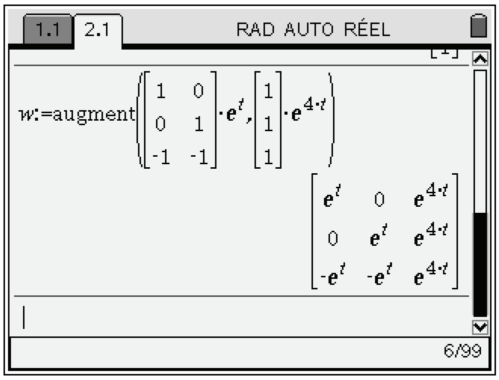
La matrice wronskienne W est formée des composantes des fonctions a, b et c. Elle vérifie $W' = A \cdot W$.

Sur la TI-Nspire CAS, on pourrait par exemple la construire en écrivant :

```
w:=augment(linalgcas\eigenvects(a,1)e^(t), linalgcas\eigenvects(a,4) e^(4t))
```

mais on peut également récupérer les deux résultats déjà obtenus en les sélectionnant dans l'historique des calculs.





6.2 *Résolution d'un système "avec second membre"*

Considérons à présent le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z + t \\ y' = x + 2y + z - t \\ z' = x + 2y + 2z + 1 \end{cases}$$

C'est un système du type $X' = A \cdot X + B$.

Nous avons déjà déterminé une base de solutions du système homogène $X' = A \cdot X$.

Pour déterminer les solutions de l'équation "avec second membre" à partir d'une base de solutions de l'équation homogène, on peut poser $X = W \cdot Y$.

X est alors solution si et seulement si $X' = W' \cdot Y + W \cdot Y' = A \cdot X + B$.

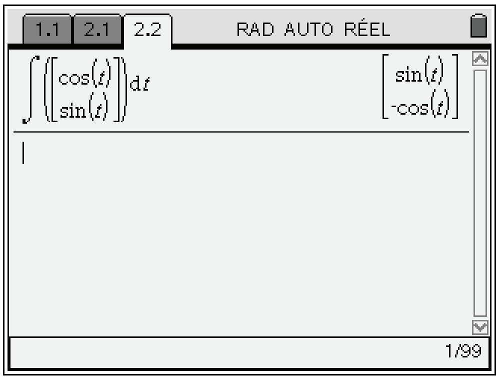
En utilisant $W' = A \cdot W$, et donc $W' \cdot Y = A \cdot W \cdot Y = A \cdot X$, on voit que X est solution si et seulement si $W \cdot Y' = B$.

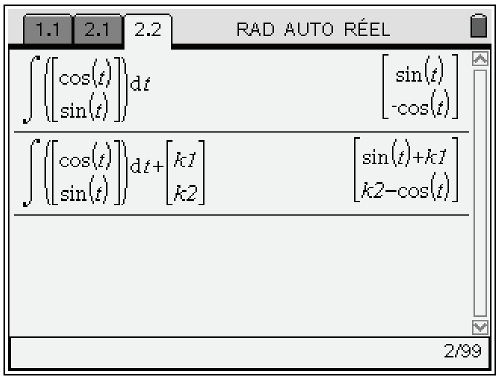
© T³ France 2008 / Photocopie autorisée

Pour résoudre l'équation $W \cdot Y' = B$, il suffit d'intégrer le vecteur obtenu en calculant $W^{-1} \cdot B$.
Il reste ensuite à multiplier le vecteur obtenu par *W* pour obtenir l'expression de *X*.

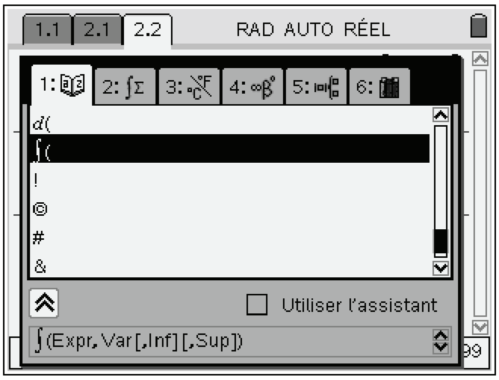
☞ *Si on recherche l'expression générale des solutions, il faut ajouter les constantes d'intégration.*

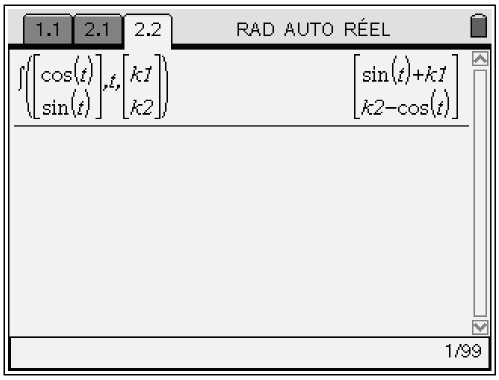
Sur TI-Nspire CAS, *il est effectivement possible de rechercher une primitive d'une fonction, mais aussi d' une matrice. Il suffit ensuite d'ajouter les constantes d'intégration :*



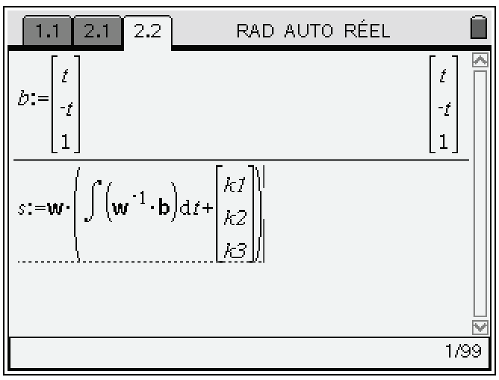


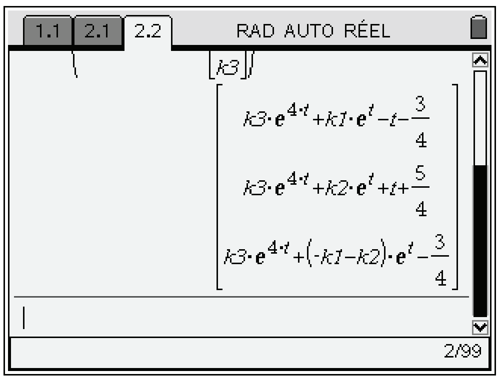
☞ *On peut aussi choisir d'utiliser la fonction* ∫ *présente dans le catalogue, en indiquant les 3 arguments suivants : expression à intégrer, variable d'intégration, constantes d'intégration :*





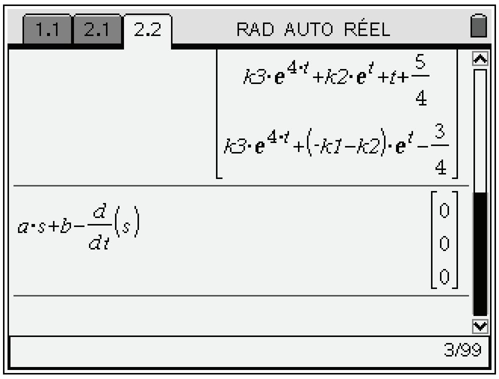
En utilisant l'une ou l'autre de ces méthodes, on obtient ainsi facilement l'expression des solutions :





Une seule instruction suffit pour vérifier que la solution est bien correcte :

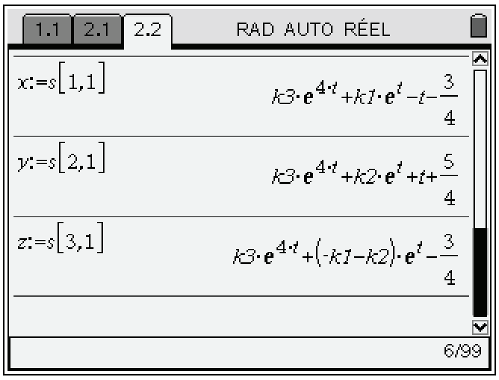
© T³ France 2008 / Photocopie autorisée



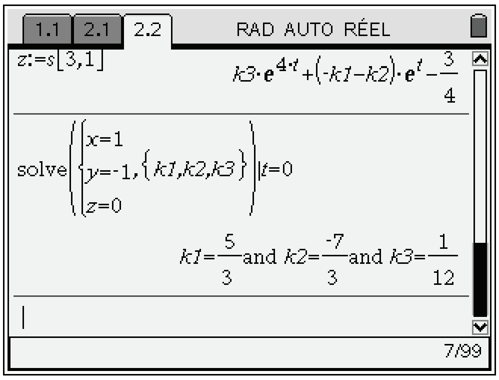
6.3 *Recherche des solutions du système avec conditions initiales*

Il est naturellement facile de déterminer les valeurs des constantes si on ajoute une condition initiale. Cherchons par exemple la solution correspondant à $x(0)=1$, $y(0)=-1$, $z(0)=0$.

On commence par extraire les différentes expressions de la matrice.



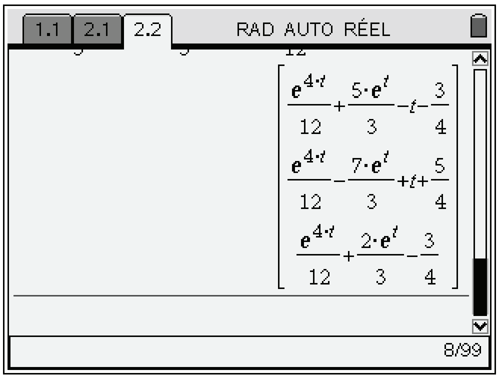
Puis on résout le système d'équations obtenu à partir des conditions initiales :



On peut ensuite calculer l'expression des solutions en tenant compte des conditions obtenues sur k1, k2, k3 :

s | Ans

© T³ France 2008 / Photocopie autorisée



Cela termine la résolution “manuelle” de notre système d’équations.

7. Programme de résolution symbolique d’un système d’équations différentielles linéaires

7.1 *Description de la méthode utilisée*

Pour résoudre facilement les systèmes différentiels plus complexes, nous allons utiliser un programme permettant d’obtenir directement l’expression des solutions. Ce programme fait partie de la bibliothèque **linalgcas**, que l’on peut télécharger sur le site **www.univers-ti-nspire.fr**.

La résolution sera possible chaque fois que l’on pourra déterminer sous forme symbolique les racines du polynôme caractéristique. Il se limite aux systèmes ayant au plus 4 équations.

On se propose ici de résoudre le système différentiel $X' = A \cdot X + B$.

1. On commence par résoudre le système homogène $X' = A \cdot X$. Une méthode facile à mettre en œuvre sur la calculatrice consiste à utiliser l’expression générale de ce système : $X(t) = \exp(t \cdot A) \cdot V$.
   – La matrice $W(t) = \exp(t\,A)$ est la matrice wronskienne associée à la base de solutions définies par les colonnes de cette matrice.
   Le programme **expmat**, décrit dans le **chapitre 9** sur le calcul matriciel avancé nous permet de la déterminer.
   – Le vecteur $V = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$ est un vecteur constant arbitraire.

   Ce vecteur devra être construit par notre programme de résolution.
2. Ensuite, pour résoudre l’équation homogène $X' = A \cdot X + B$, on utilise la “méthode de variation de la constante”.
   Comme nous l’avons vu lors de la résolution “manuelle”, si on pose $X = W \cdot Y$, alors X est solution si et seulement si $W \cdot Y' = B$, ou encore $Y' = W^{-1} \cdot B$.
   Pour obtenir X, il suffit donc de faire le produit de W par une primitive de $W^{-1} \cdot B$, ce qui s'obtient en écrivant : `W*∫(W^(-1)*B,t)`.
   Ici nous n’avons pas incorporé les constantes d’intégration lors du calcul de l’intégrale.
   On obtient donc une solution particulière S, qui devra être ajoutée à la solution générale de l’équation homogène, c’est à dire à $X = W \cdot V$, avec $W(t) = \exp(t\,A)$ et $V = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$.

© T³ France 2008 / Photocopie autorisée

3. Chercher les valeurs des constantes $k_1, k_2, \ldots$ à utiliser pour définir la solution correspondant à une solution particulière telle que $X(t_0) = X_0$, revient à déterminer le vecteur colonne V tel que $S(t) + W(t) \cdot V = X(t)$. Cette égalité devant être en particulier vérifiée pour $t = t_0$, on obtient $V = W(t_0)^{-1}(X_0 - S(t_0))$,
puis $X(t) = W(t) \cdot V + S(t) \quad \left(= W(t) \cdot W(t_0)^{-1} \cdot (X_0 - S(t_0)) + S(t) \right)$.

N.B. Nous n'avons pas utilisé ici l'ensemble des résultats disponibles sur le lien entre la résolution des équations différentielles et le calcul d'exponentielles de matrices.

On a ici $W(t) = \exp(t\,A)$, $W(t_0)^{-1} = \exp(t_0\,A)^{-1} = \exp(-t_0\,A)$,
et $W(t) \cdot W(t_0)^{-1} = \exp((t - t_0)A)$.
On retrouve l'expression $X(t) = \exp((t - t_0)A) \cdot (X_0 - S(t_0)) + S(t)$.

7.2 Exemple d'utilisation avec une matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$

Reprenons le système précédent :

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z + t \\ y' = x + 2y + z - t \\ z' = x + 2y + 2z + 1 \end{cases}$$

avec les mêmes conditions initiales : $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, $z(0) = 0$.

Pour traiter cet exemple, on lance le programme **desysinitcond**, présent dans la bibliothèque de programmes **linalgcas** :

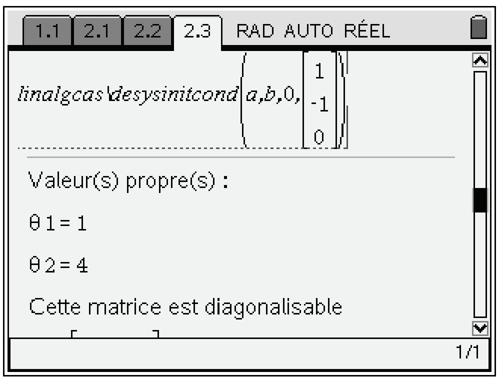
```
linalgcas\desysinitcond([2,1,1;1,2,1;1,1,2],[t;-t;1],0,[1;-1;0])
```

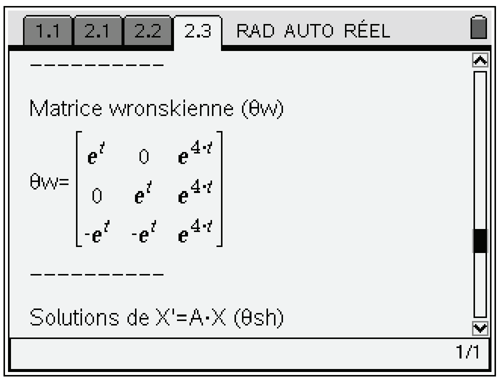
(On aurait aussi pu utiliser le modèle 2D adapté à la saisie des matrices)
Si l'on effectue ce calcul après avoir défini les variables *a* et *b*, on peut aussi écrire :

```
linalgcas\desysinitcond(a,b,0,[1;-1;0])
```

On obtient alors automatiquement l'affichage de la suite de tous les calculs effectués. Sur la calculatrice, il est possible de se déplacer dans cette suite de calculs en utilisant ctrl 3 et ctrl 9.

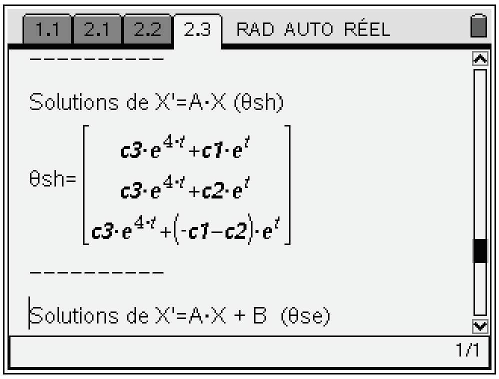
- Écran 1. Appel du programme.
- Écran 2. Affichage de la matrice wronskienne (base de solutions de l'équation homogène).

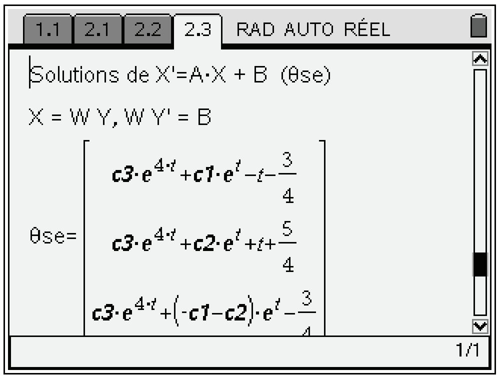




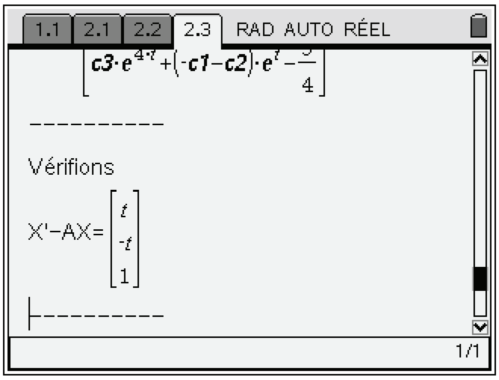
© T³ France 2008 / Photocopie autorisée

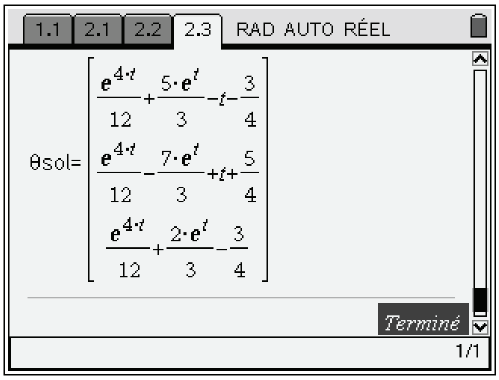
- Écran 3. Forme générale des solutions de l'équation homogène.
- Écran 4. Forme générale des solutions de l'équation complète.



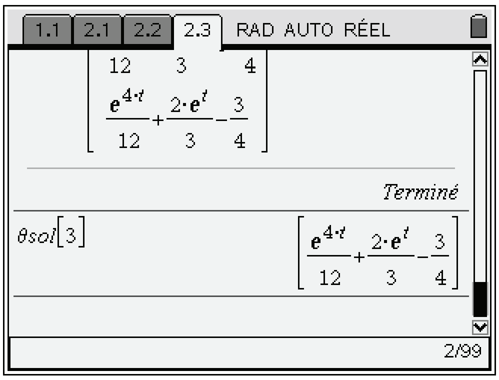


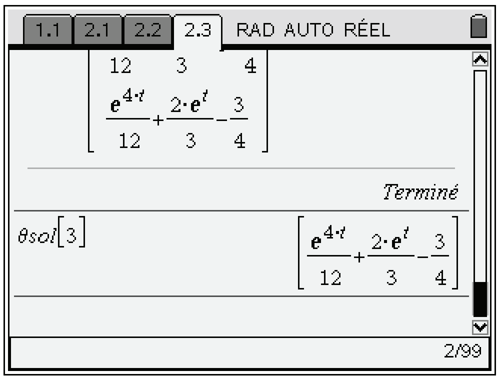
- Écran 5. Vérification.
- Écran 6. Solution en tenant compte des conditions initiales.



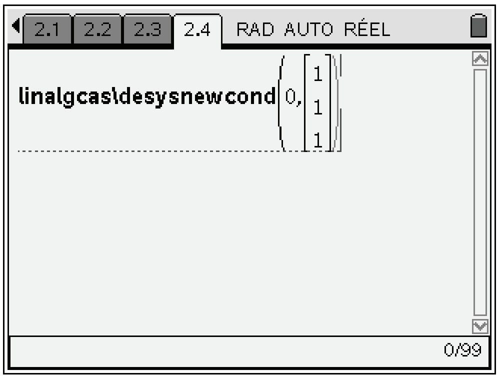


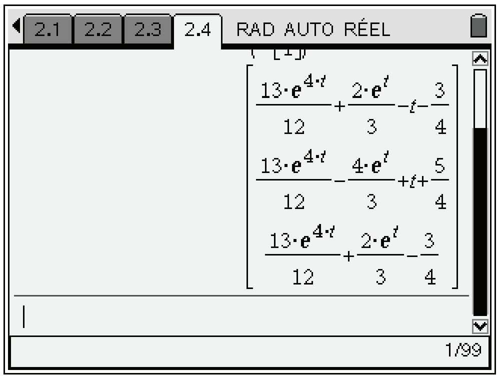
À partir de l'application **Calculs**, il est possible de rappeler la matrice **θsol** qui correspond à la dernière matrice affichée. On peut aussi demander l'affichage d'une ligne particulière de cette matrice. Il est également possible de récupérer les différents éléments de cette matrice, par exemple pour les mémoriser dans une variable.





Voici à présent la résolution du même système, mais avec les conditions initiales $x(0)=1$, $y(0)=1$, $z(0)=1$:

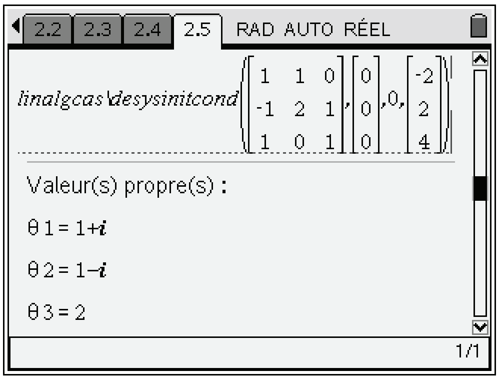


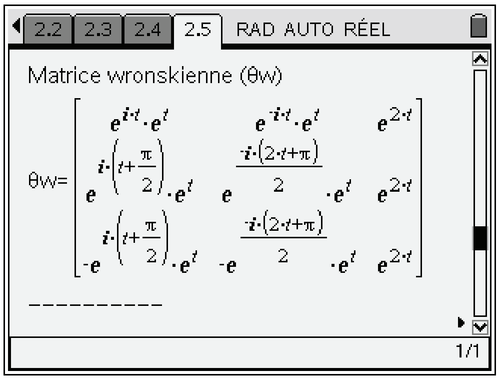


7.3 *Exemple d'utilisation avec une matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$*

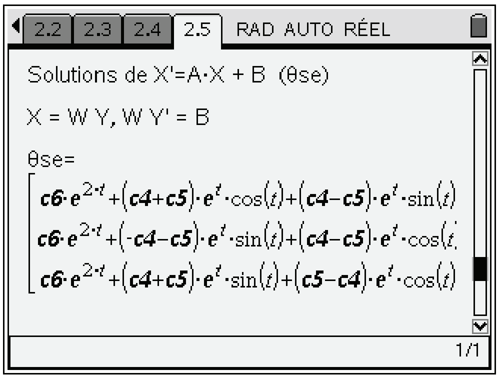
$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = -2 \\ y(0) = 2 \\ z(0) = 4 \end{cases}$$

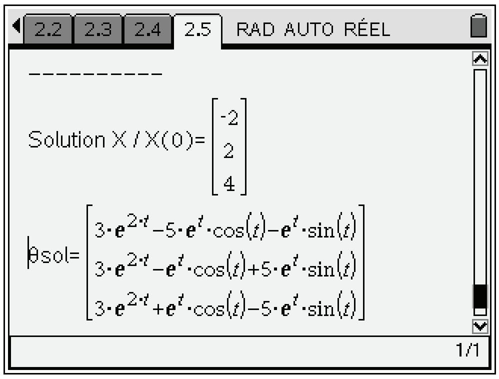
- Écran 1. Appel du programme.
- Écran 2. Affichage de la matrice wronskienne (base de solutions de l'équation homogène).





- Écrans 3 & 4. Forme générale des solutions, et solution vérifiant la condition initiale.





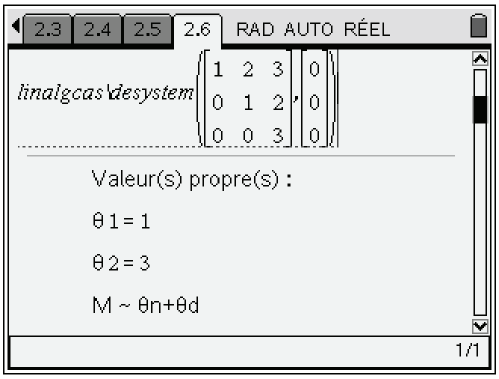
© T³ France 2008 / Photocopie autorisée

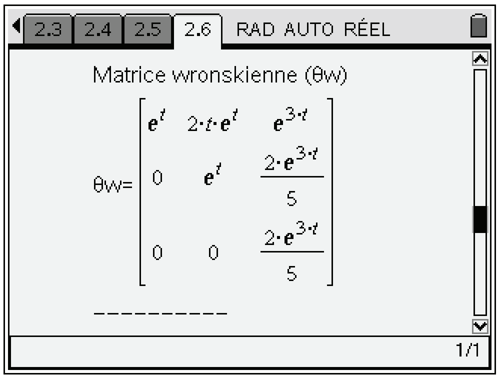
7.4 *Exemple d'utilisation avec une matrice non diagonalisable*

$$\begin{cases} x' = x + 2y + 3z \\ y' = y + 2z \\ z' = 3z \end{cases}.$$

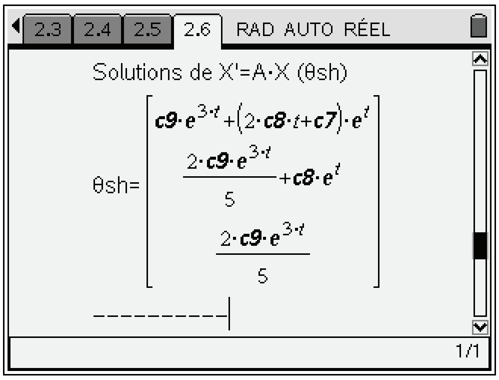
Pour traiter cet exemple, dans lequel il n'y a pas de condition initiale, on lance le programme **desystem**, également présent dans la bibliothèque de programmes **linalgcas** :

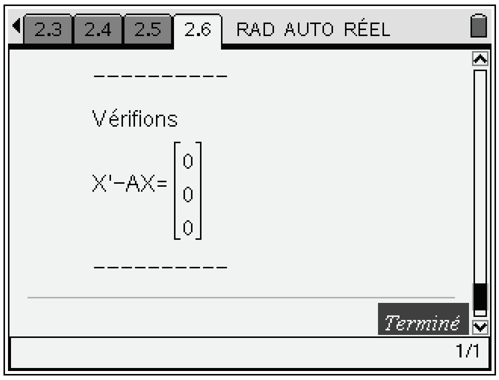
- Écrans 1 & 2. Appel du programme et affichage de la matrice wronskienne.





- Écrans 3 & 4. Solution obtenue et vérification.

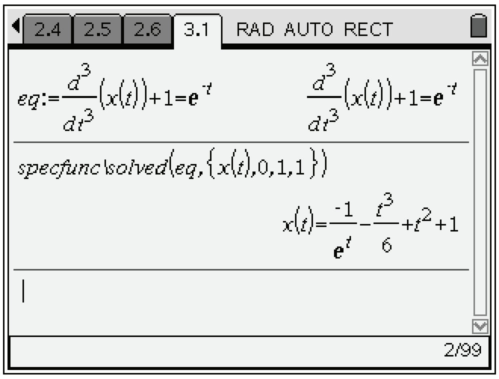


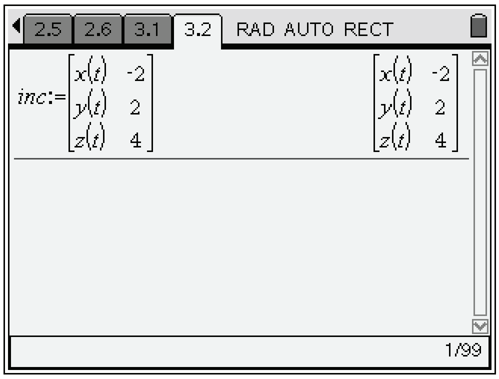


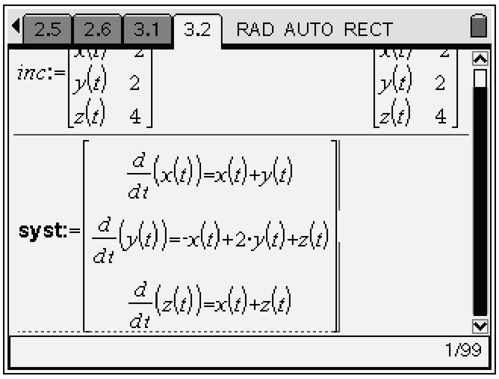
8. Utilisation d'une transformée de Laplace

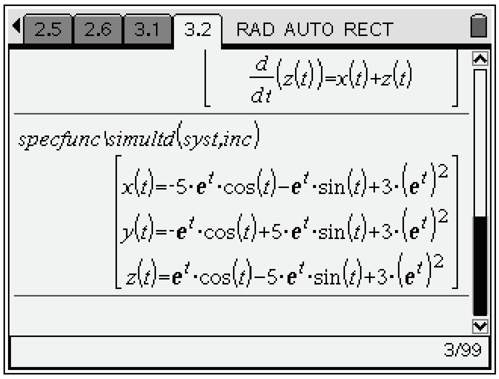
Dans les classes où cette méthode est au programme, on pourra également utiliser les fonctions **laplace** et **ilaplace**, ou encore directement les fonctions **solved** et **simultd** contenues dans la bibliothèque de programmes **specfunc**.

Ces deux dernières fonctions permettent de résoudre des équations différentielles linéaires d'ordre supérieur à 2, ou des systèmes d'équations différentielles.
Cette bibliothèque de programmes est téléchargeable sur le site **www.univers-ti-nspire.fr**.









Vous pouvez par exemple vous reporter à la page **http://www.seg.etsmtl.ca/ti/laplace.html** pour des informations complémentaires sur l'utilisation de la Transformation de Laplace pour la résolution d'équations différentielles.

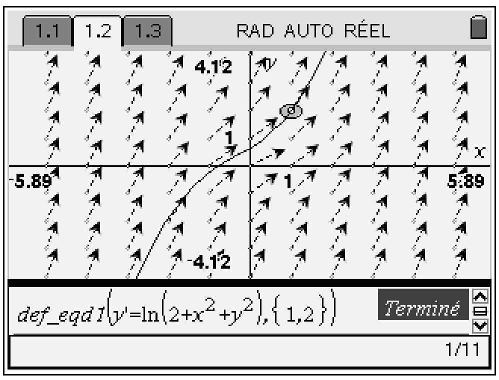
9. Étude graphique d'une équation différentielle

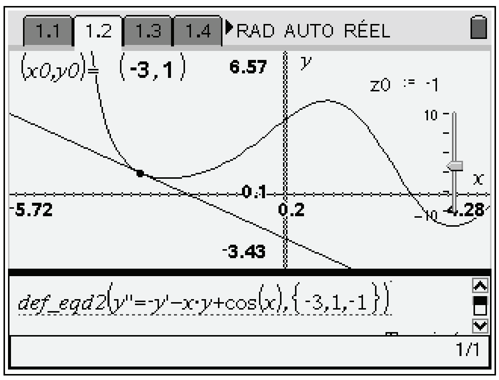
Lorsqu'une résolution formelle n'est pas possible, il reste possible d'utiliser une méthode de résolution approchée permettant de construire la solution.

La version 1.4 de TI-Nspire CAS ne dispose pas d'un outil intégré permettant d'obtenir directement ce type de représentation graphique, mais vous trouverez sur le site **www.univers-ti-nspire.fr** différents fichiers permettant de compenser cette absence.

Ces fichiers offrent les possibilités suivantes :

- L'étude d'une équation différentielle d'ordre 1, avec construction du champ des tangentes. (Ce classeur est pré-chargé dans le dossier exemples sur la version 1.6 de décembre 2008).
- L'étude d'une équation différentielle d'ordre 2
- L'étude d'un système différentiel autonome, avec construction du champ des tangentes.





Exercices

1 Utilisation de la méthode de variation des constantes

Résoudre l'équation différentielle $\left(1+x^2\right)y''+xy'-y=x\sqrt{x^2+1}$.

On recherchera une solution particulière simple de l'équation homogène, et on utilisera la méthode de variation des constantes.

2 Changement de fonction inconnue

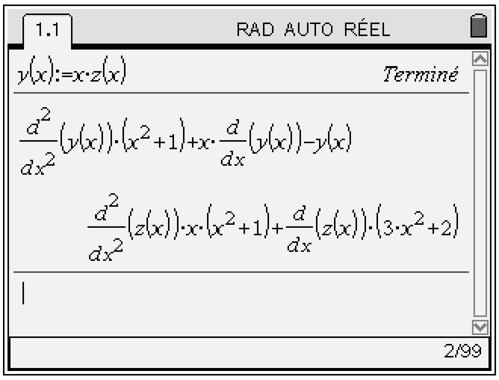
Résoudre l'équation différentielle $x^2y''+4xy'+\left(2-x^2\right)y=1$ en effectuant le changement de fonction inconnue $u=x^2y$. On cherchera s'il existe des solutions définies sur $\mathbb{R}$.
Vérifier la solution obtenue en résolvant directement l'équation sur la TI-Nspire CAS.

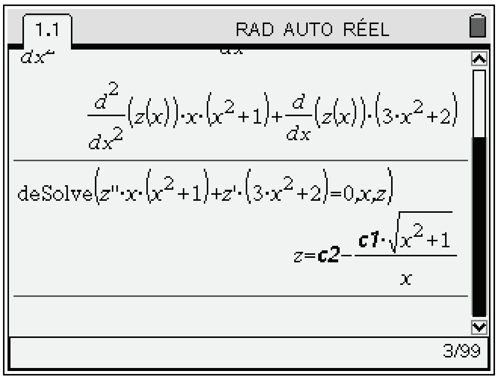
Solutions des exercices

1 Utilisation de la méthode de variation des constantes

On peut facilement vérifier que $y(x)=x$ est solution.
Sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, on peut donc poser $y(x)=x\cdot z(x)$ pour se ramener à une équation différentielle en z' et z''. On peut laisser ce travail à la TI-Nspire CAS.

On obtient ainsi l'équation $x\left(x^2+1\right)z''+(3x^2+2)z'=0$. La résolution de cette équation ne pose aucun problème car l'on peut se ramener à une équation d'ordre 1.





En conclusion, sur $\mathbb{R}_-^+$ ou $\mathbb{R}_+^*$, on obtient $y(x)=Ax+B\sqrt{x^2+1}$, et il est évident qu'il est possible d'obtenir une solution définie sur $\mathbb{R}$.

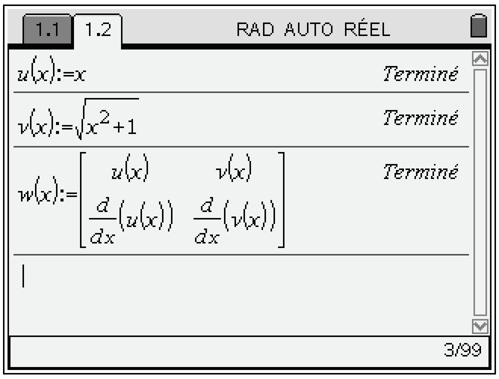
Pour résoudre l'équation avec second membre, on peut appliquer la méthode de “variation des constantes”. On cherche $y(x)$ sous la forme $y(x)=a(x)u(x)+b(x)v(x)$, avec ici $u(x)=x$ et $v(x)=\sqrt{x^2+1}$.

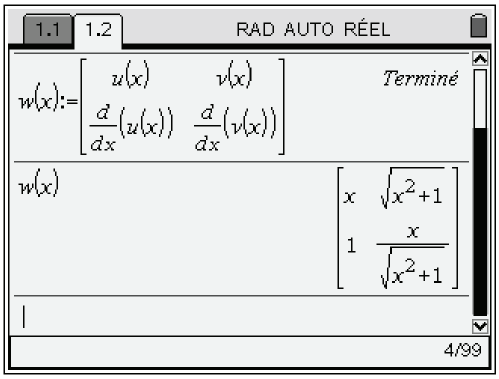
On a alors $\begin{cases} a'(x)u(x)+b'(x)v(x)=0 \\ a'(x)u'(x)+b'(x)v'(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{cases}$

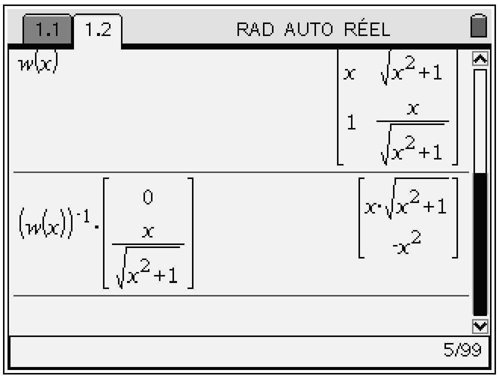
© T³ France 2008 / Photocopie autorisée

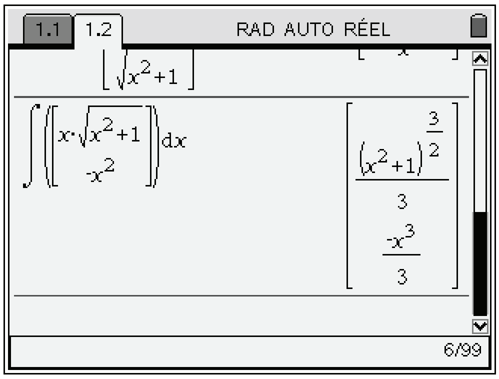
Si on pose $W(x)=\begin{bmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x)\end{bmatrix}$, on obtient $\begin{bmatrix} a'(x) \\ b'(x)\end{bmatrix}=W(x)^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{bmatrix}$.

Tous les calculs se font très simplement sur une TI-Nspire CAS :









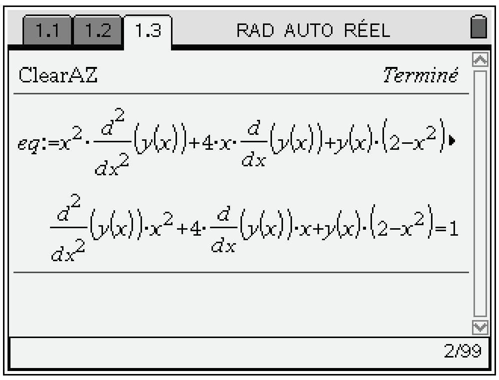
D'où $a(x)=\dfrac{\left(x^2+1\right)^{3/2}}{3}+C_1$ et $b(x)=-\dfrac{x^3}{3}+C_2$, ce qui conduit à

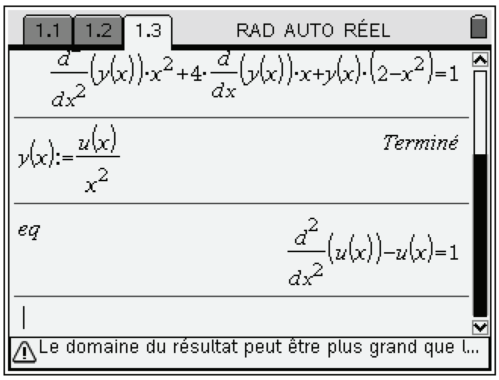
$y(x)=\dfrac{x}{3}\sqrt{x^2+1}+C_1x+C_2\sqrt{x^2+1}$.

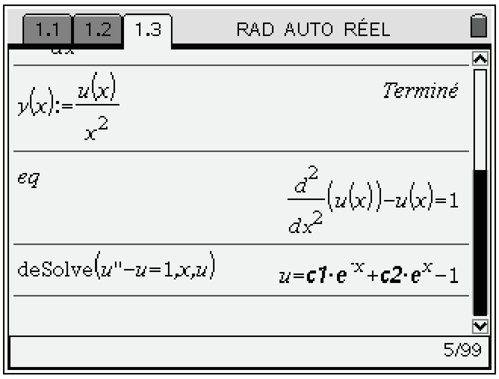
2 Changement de fonction inconnue

Pour résoudre cette équation en utilisant la méthode indiquée (TI-Nspire CAS permet en fait d'obtenir directement l'expression des solutions !), on peut la stocker sous forme symbolique dans une variable.

On peut ensuite définir la fonction y en utilisant l'indication du texte, puis demander l'affichage de l'équation (calcul valable sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$).

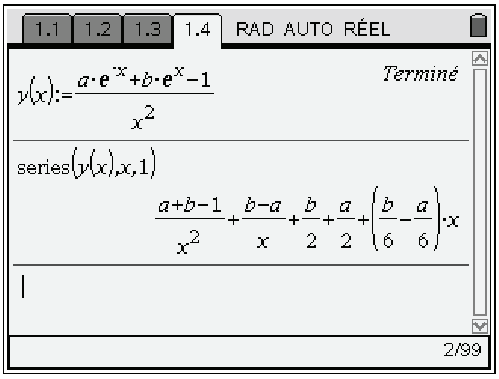


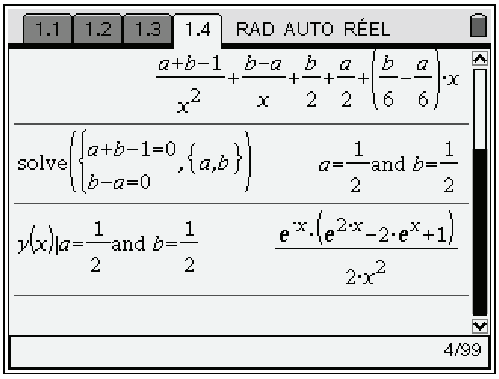




On obtient ainsi $y(x) = \dfrac{Ae^{-x} + Be^{x} - 1}{x^2}$.

Il est facile d'obtenir un développement asymptotique de cette fonction en 0, et d'en déduire les conditions nécessaires et suffisantes de l'existence d'un prolongement par continuité en 0.





On obtient ainsi $y(x) = \dfrac{\frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x} - 1}{x^2} = \dfrac{\cosh(x) - 1}{x^2}$, prolongée en 0 par $\dfrac{4b-1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Cette fonction est en fait de classe C^{∞}, car développable en série entière.

En effet, pour $x \neq 0$, $y(x) = \dfrac{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2(n-1)}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$ et cette égalité reste vraie en 0.

On peut enfin vérifier que l'équation différentielle est bien vérifiée en 0, ce qui montre que l'on a obtenu une solution de cette équation définie sur $\mathbb{R}$.

© T³ France 2008 / Photocopie autorisée