Chapitre 6

Géométrie analytique

Ce chapitre présente les possibilités de votre calculatrice dans le domaine de la géométrie analytique, tout particulièrement pour les problèmes liés aux espaces euclidiens.

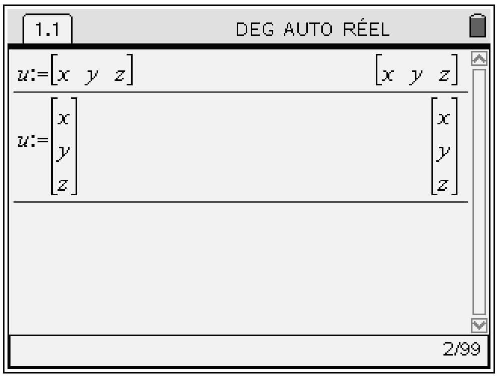
1. Manipulation des points ou des vecteurs

1.1 *Représentation par une matrice ligne ou colonne*

Pour manipuler des points ou des vecteurs, il suffit de stocker les composantes :

- sous la forme d'une matrice ligne $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ en séparant chaque composante par une virgule,
- ou d'une matrice colonne $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ en utilisant un point-virgule.

☞ *On peut également utiliser les modèles disponibles par* ctrl .
Le point-virgule s'obtient par ctrl : .



Nous vous recommandons la seconde solution si vous souhaitez utiliser des matrices, et calculer l'image d'un vecteur par une application linéaire. Vous pourrez en revanche utiliser sans problème la première représentation si vous vous limitez aux opérations usuelles : somme, produit par un scalaire, produit scalaire, produit vectoriel.

Les fonctions les plus utiles sont dans le sous-menu **Vecteur** du menu **Matrice & vecteur** :

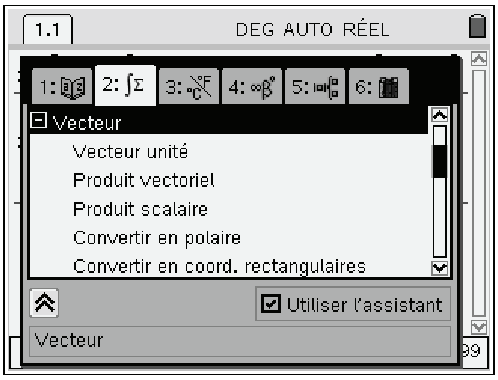
unitV Permet d'obtenir un vecteur de norme 1 colinéaire à un vecteur donné.

crossP Produit vectoriel de deux vecteurs.

DotP Produit scalaire de deux vecteurs.

Vous trouverez également dans le sous-menu **Normes** la fonction **norm** permettant de calculer la norme d'un vecteur.

Vous pouvez également utiliser ces fonctions à partir du catalogue général page 2.



Si par la suite, vous voulez récupérer certains éléments placés dans une matrice, vous aurez besoin de savoir que :

mat[*i*,*j*] permet d'obtenir l'élément situé sur la *i*-ième ligne et la *j*-ième colonne d'une matrice *mat*.

mat[*i*] permet d'obtenir, sous la forme d'une matrice ligne, la *i*-ème ligne d'une matrice *mat*.

2. Quelques exemples

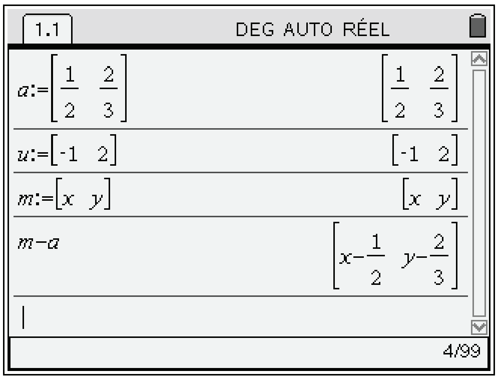
2.1 *Équation réduite d'une droite*

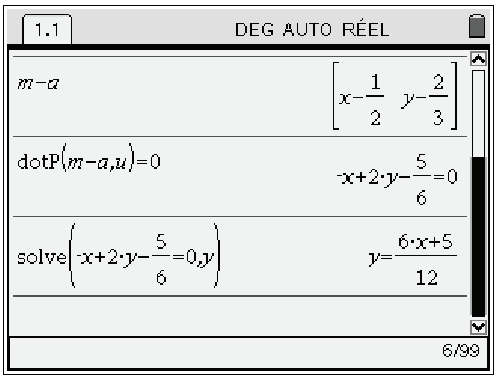
On demande de déterminer l'équation réduite de la droite passant par $A\begin{pmatrix}1/2\\2/3\end{pmatrix}$, orthogonale à la droite D d'équation $2x+y+4=0$.

Un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ est sur cette droite si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ qui est un vecteur directeur de D.

Après avoir défini les variables **a**, **u**, **m**, on obtient les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ en calculant **m−a**, puis le produit scalaire avec $\vec{u}$ en utilisant la fonction **dotP**.

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation obtenue en écrivant que ce produit scalaire doit être nul pour obtenir l'équation réduite.

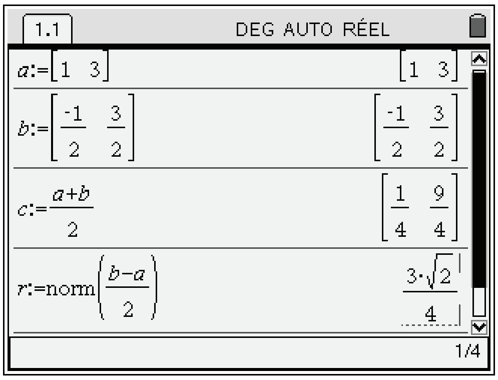




2.2 *Équation d'un cercle*

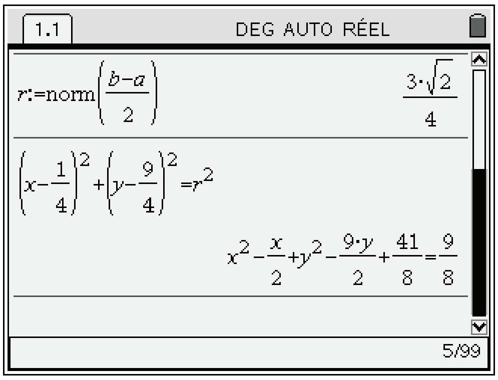
On recherche l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1/2\\3/2\end{pmatrix}$.

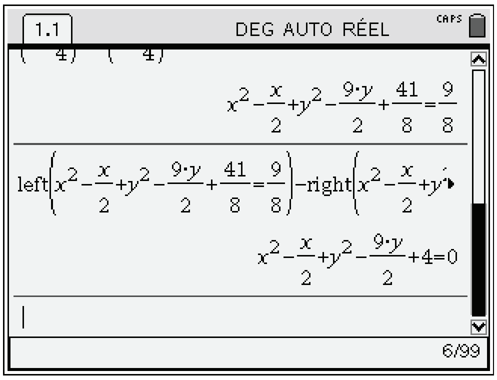
Une première méthode consiste à déterminer le rayon et le centre de ce cercle.



On peut ensuite utiliser la formule générale de l'équation d'un cercle de centre $C\begin{pmatrix}x_c\\y_c\end{pmatrix}$ et de rayon R :

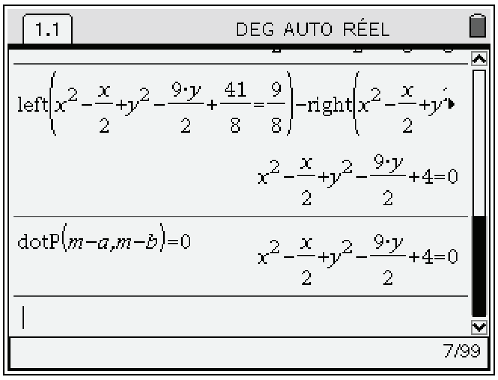
$(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2$.





☞ *Sur le dernier écran, nous avons utilisé les fonctions* **left** *et* **right** *présentes dans le sous-menu* **Extract** *du menu* **Algèbre** *pour extraire les membres de gauche et de droite de l'équation précédente et en faire la différence.*

La seconde méthode, beaucoup plus rapide ici, consiste à utiliser le fait qu'un point M est sur le cercle si et seulement si $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0$:

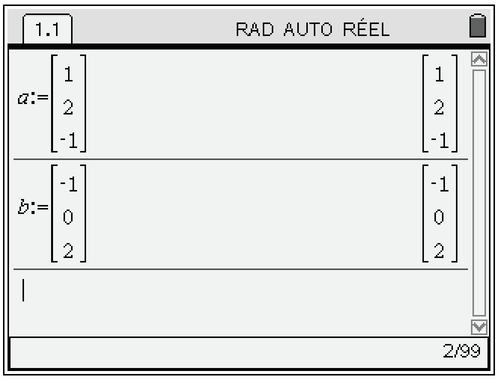


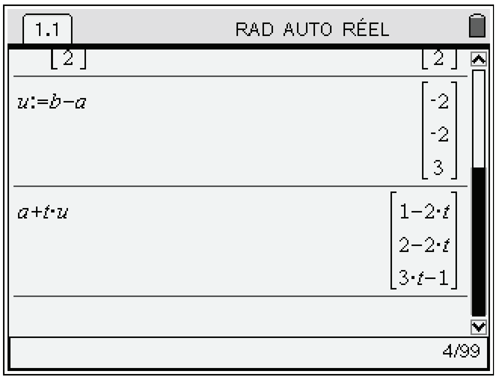
2.3 *Intersection entre une droite et un plan*

Soit $A\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ et P le plan d'équation $x-y+2z=0$.

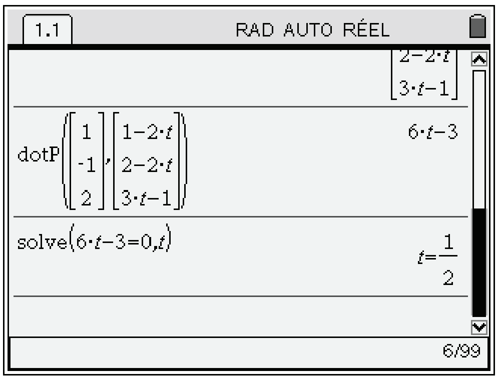
On demande de déterminer le point d'intersection entre la droite (AB) et le plan P.

On va commencer par déterminer $\vec{u}$, vecteur directeur de la droite (AB), puis les coordonnées d'un point quelconque de cette droite (système d'équations paramétriques) :

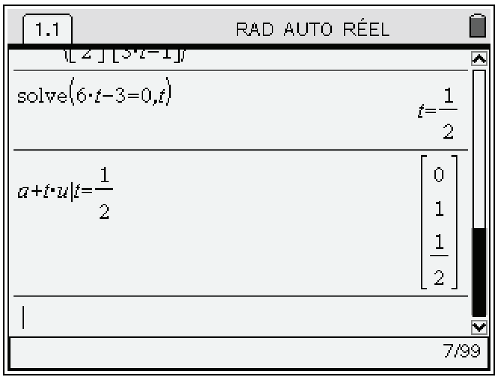




Le plus simple est ensuite de faire le produit scalaire avec le vecteur $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ qui est normal au plan P pour obtenir $x-y+2z$. On cherche ensuite pour quelle valeur de t cette expression est nulle.



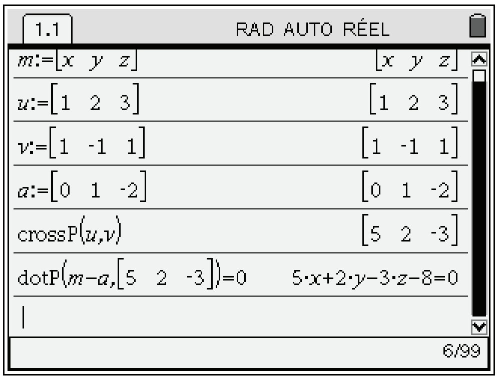
Il ne reste plus qu'à remplacer t par sa valeur dans l'expression définissant le point M :



2.4 *Équation d'un plan dans l'espace*

On recherche l'équation du plan défini par le point $A\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ et par les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$:

$M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est dans ce plan si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal au vecteur $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$.



3. Espaces euclidiens

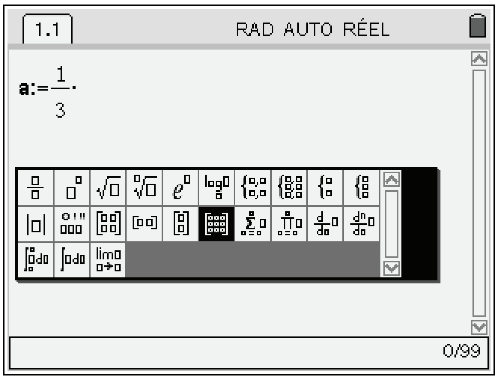
Nous allons voir que l'utilisation de la TI-Nspire CAS permet de simplifier considérablement la résolution d'exercices classiques, comme par exemple l'étude de la nature d'une isométrie définie par une matrice, la recherche d'une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel, ou encore la recherche de la matrice d'une projection ou d'une symétrie orthogonale.

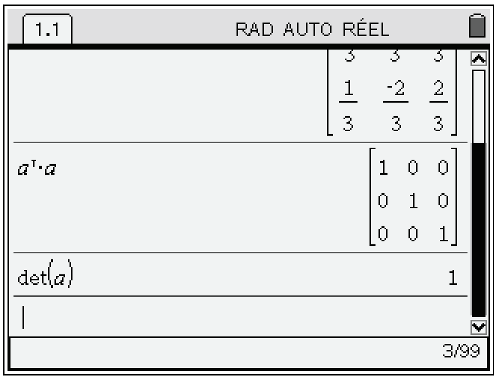
3.1 *Déterminer la nature d'une isométrie*

Dans un espace euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormée $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, on considère l'endomorphisme f dont la matrice est $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{bmatrix}$. On demande de déterminer la nature de f.

Nous allons montrer qu'il s'agit d'une isométrie en vérifiant que ${}^{t}AA = I_3$, et que cette isométrie est directe en montrant que $\det(A) = 1$.

On saisit la matrice en utilisant le modèle . On passe d'une case à l'autre à l'aide de tab.





☞ *Pour transposer la matrice, nous avons utilisé l'opérateur* $^{\mathsf{T}}$. *Cet opérateur s'obtient dans le menu* **Matrice & vecteur**. *On doit placer cet opérateur après la matrice.*
Cet opérateur calcule en fait la transposée de la conjuguée de la matrice initiale, ce qui est donc différent de la matrice transposée pour les matrices à coefficients complexes. Il s'agit en fait de la matrice de l'adjoint.

Cette matrice est donc la matrice d'une rotation vectorielle.

Nous savons que l'angle de cette rotation vérifie $1 + 2\cos(\theta) = \text{trace}(A) = \dfrac{5}{3}$.

On a donc $\cos(\theta) = \dfrac{1}{3}$.

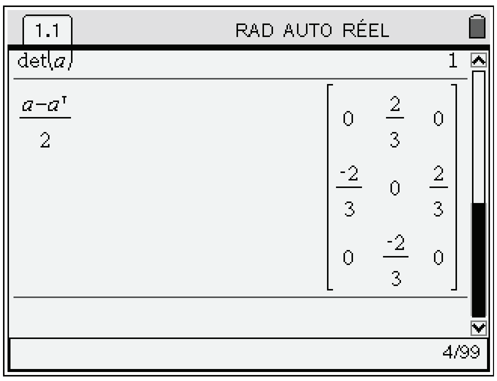
Pour déterminer son axe et une mesure de l'angle, on pourrait par exemple commencer par chercher les vecteurs invariants.

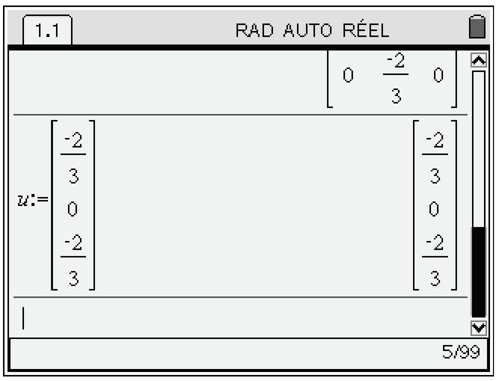
Il existe en fait une méthode plus rapide, bien adaptée à l'utilisation d'une calculatrice.

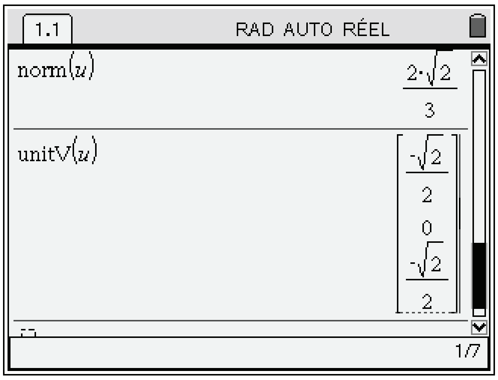
Si on calcule $\dfrac{1}{2}(A - {}^{t}A)$, on obtient une matrice antisymétrique du type :

$$\begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$$

On peut montrer que si on note $\vec{u} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$, alors on a $\vec{u} = \sin(\theta)\vec{k}$, avec $\vec{k}$ vecteur unitaire, colinéaire à $\vec{u}$, vecteur directeur de l'axe de la rotation, et θ mesure de l'angle de la rotation lorsque l'on oriente l'axe suivant le vecteur $\vec{k}$.







En conclusion, on obtient un vecteur normé directeur de l'axe en prenant $\vec{k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et l'angle de la rotation vérifie alors $\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{1}{3}\\ \sin(\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{cases}$.

On pourrait aussi choisir de prendre $\vec{k}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, avec $\begin{cases}\cos(\theta)=\frac{1}{3}\\ \sin(\theta)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{cases}$.

☞ *Vous trouverez à la fin de ce chapitre un exemple d'étude d'une symétrie orthogonale.*

3.2 *Orthogonalisation d'une base*

Pour déterminer une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel muni du produit scalaire euclidien il suffit d'utiliser la fonction **QR**, accessible dans le sous-menu **Avancé** du menu **Matrice & vecteur**, ou dans le catalogue (ce qui permet d'avoir la syntaxe).

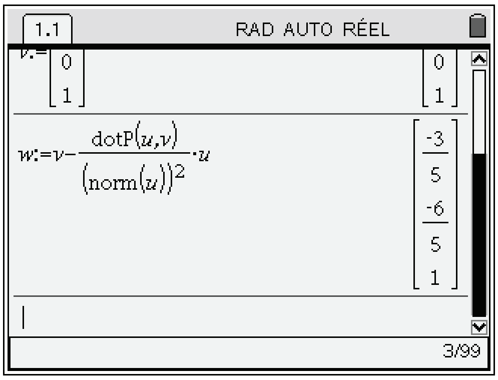
Soit par exemple le plan P défini par $x+2y+3z=0$.

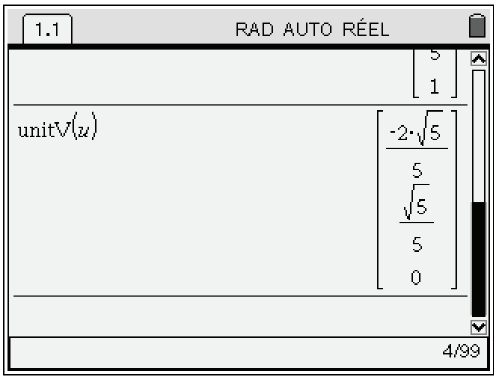
Les vecteurs de ce plan sont du type $\begin{pmatrix}-2y-3z\\y\\z\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$.

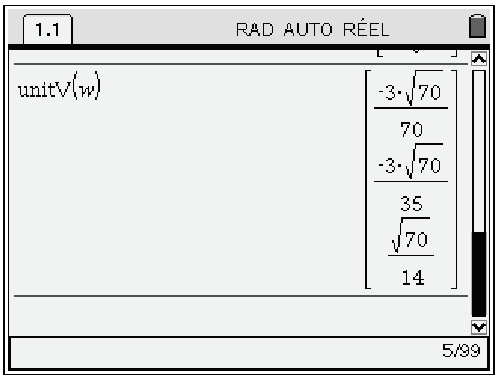
On obtient donc une base de ce plan en considérant $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$.

Pour obtenir une base orthonormée de ce plan, on peut suivre la méthode du cours.

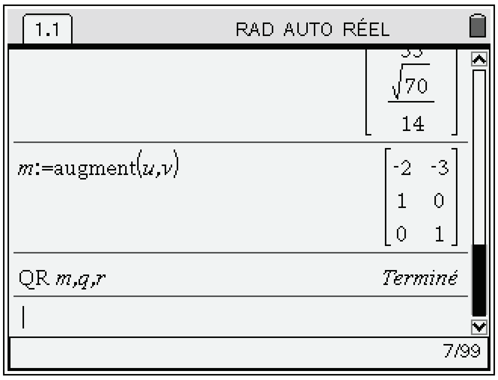
On construit $\vec{w}=\vec{v}-\frac{\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|^2}\vec{u}$, puis on calcule $a=\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $b=\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$:

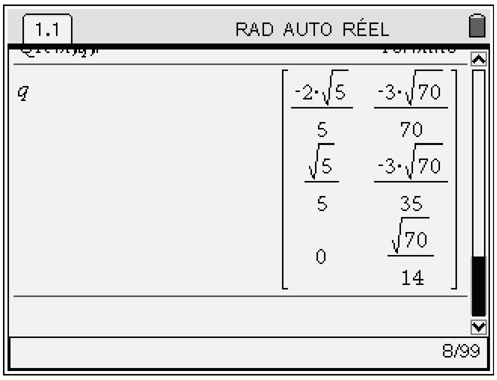






En fait, sur une TI-Nspire CAS, tout cela peut se faire en une seule opération en demandant la décomposition QR de la matrice $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.





- *Nous avons utilisé la fonction* **augment** *pour regrouper les deux vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *pour en faire une matrice avec 2 colonnes et 3 lignes.*
- *La décomposition QR s'obtient en utilisant l'instruction* **QR***. Cette instruction place dans les matrices indiquées sur la ligne de commande le résultat de cette décomposition. On obtient donc le résultat en deux temps.*
  1. *On exécute la commande* **qr m,q,r.**
  2. *On demande la valeur de la matrice* **q**.

On obtient une base orthonormée en prenant $\vec{a}\begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix} \frac{-3\sqrt{70}}{70} \\ \frac{-3\sqrt{70}}{35} \\ \frac{\sqrt{70}}{14} \end{pmatrix}$.

3.3 *Projections et symétries orthogonales*

Voici un exercice posé à un oral de concours[1].

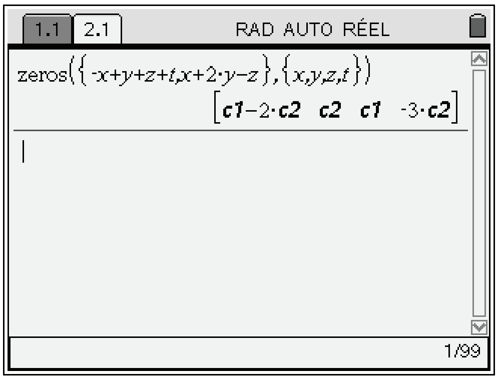
Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel défini par $\begin{cases} -x + y + z + t = 0 \\ x + 2y - z \quad = 0 \end{cases}$.

On demande de déterminer l'image du vecteur $(1,1,1,1)$ par la symétrie orthogonale par rapport à ce sous-espace. Nous allons tout d'abord utiliser une méthode proche de celle utilisée en cours.

Nous savons que si $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ est une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel *F*, la projection de *u* sur *F* s'obtient en calculant $p(u) = \sum_{i=1}^{k} \langle e_i | u \rangle e_i$ et le symétrique de *u* par $s(u) = 2p(u) - u$.

Commençons par insérer une nouvelle activité afin d'éviter tout conflit avec des variables déjà assignées, recherchons ensuite une base de *F* :

```
zeros({ -x+y+z+t,x+2y−z},{x,y,z,t})
```

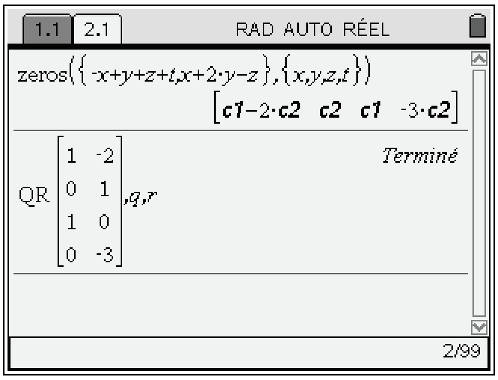


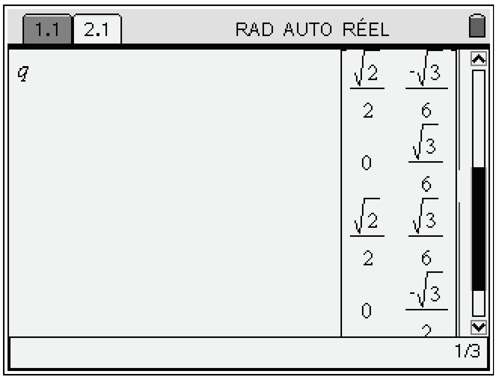
Les vecteurs de *F* sont de la forme $(a-2b, b, a, -3b)$, on obtient donc une base en prenant $(1,0,1,0)$ et $(-2,1,0,-3)$.

Utilisons l'instruction **QR** pour obtenir une base orthonormée de *F* :

```
qr [1, -2;0,1;1,0;0, -3],q,r
```

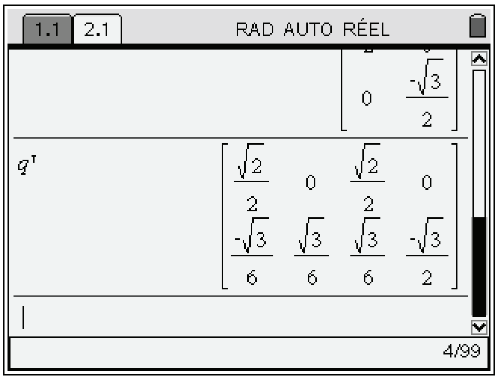
[1] Note destinée aux élèves de lycée : dans cet exercice, les vecteurs sont notés sans mettre de flèches. C'est la pratique courante après le bac, surtout dans les espaces vectoriels de dimension supérieure à 3.

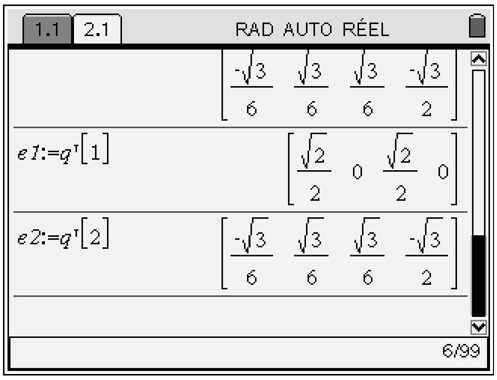




On obtient ainsi $e_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

Il reste à récupérer ces deux vecteurs à partir de la matrice **q**. Il n'y a pas d'instructions spécifiques pour faire ce travail sur la TI-Nspire CAS. Par contre, il est facile d'extraire les lignes d'une matrice. On va donc transposer la matrice **q**, puis extraire les deux lignes de cette matrice.



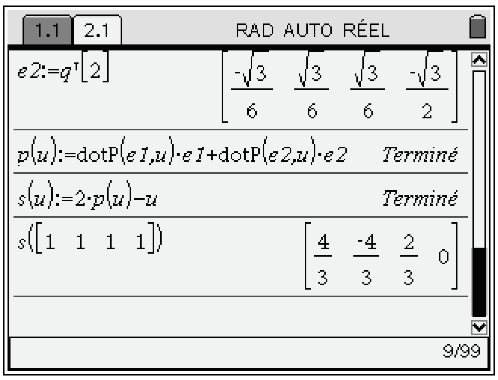


Si on préfère revenir à une notation en colonne, on doit transposer à nouveau, mais ce n'est pas indispensable ici.

Il reste à utiliser les formules du cours.

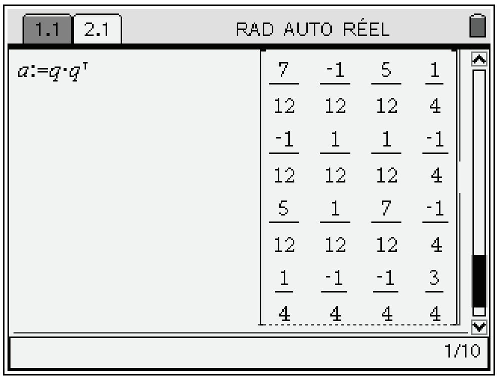
p(u):=dotP(e1,u)e1+dotP(e2,u)e2

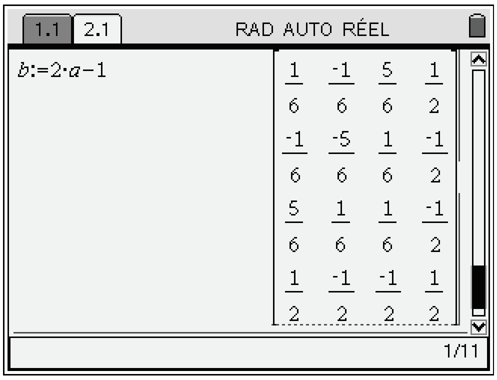
s(u):=2p(u)-u



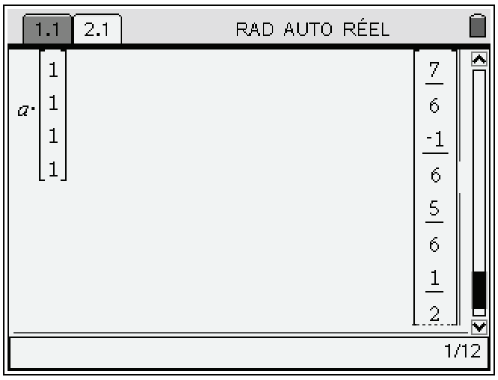
Il est en fait possible de faire tout ce calcul beaucoup plus rapidement à partir de la matrice Q.

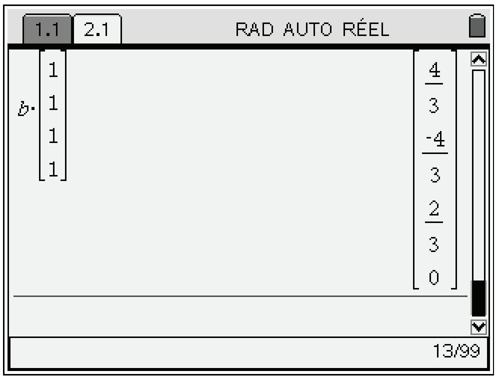
On peut en effet montrer que si Q est la matrice formée par les vecteurs colonnes d'une base orthonormée de F, il suffit de calculer $A = Q \cdot {}^tQ$ pour obtenir la matrice de la projection sur F, puis $B = 2A - I$ pour obtenir celle de la symétrie par rapport à F.



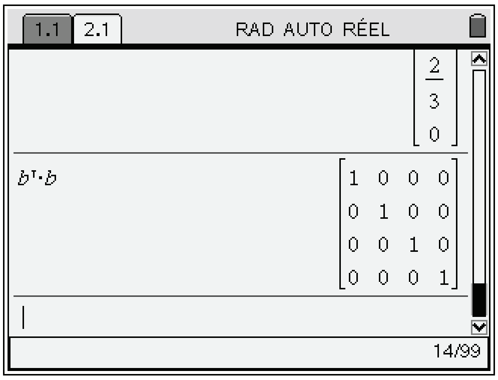


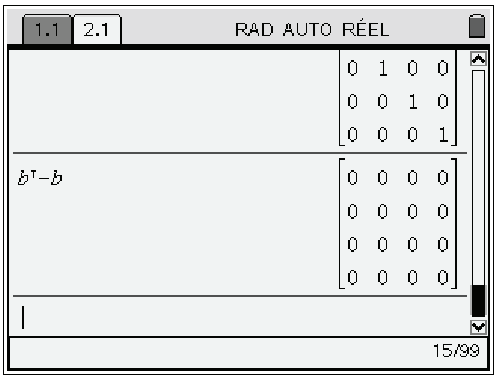
Cela nous permet d'obtenir directement l'image de $(1,1,1,1)$ par la projection ou par la symétrie :





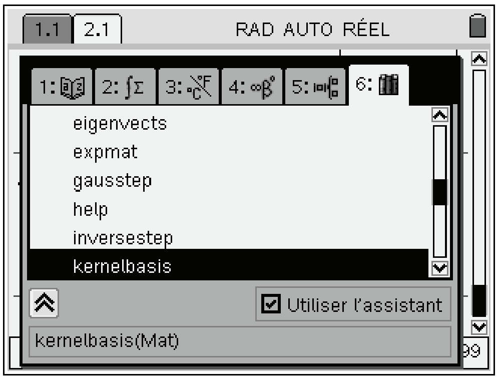
B est bien une matrice de symétrie orthogonale : on a $B{}^tB = I_4$ et $B = {}^tB$:

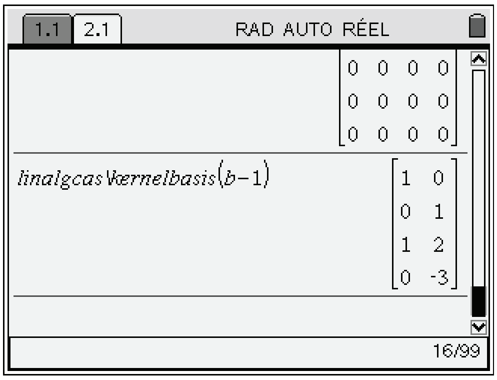




On peut enfin déterminer l'ensemble des invariants de cette isométrie. Le plus simple est de rechercher le noyau de $f - Id$ à l'aide de la fonction **kernelbasis** dont l'utilisation est décrite dans le **chapitre 9**, calcul matriciel avancé.

Attention, cette fonction ne fait pas partie des fonctions de base de la calculatrice, et vous ne pourrez donc pas obtenir l'écran suivant si vous n'avez pas placé la bibliothèque **linalgcas** dans le dossier MyLib. Vous trouverez plus d'explications à ce sujet dans le **chapitre 17**.





On obtient un espace invariant de dimension 2, engendré par $u=(1,0,1,0)$ et $v=(0,1,2,-3)$.

Exercices

1 Détermination d'une sphère

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, muni d'un repère orthonormé.

Déterminer le centre et le rayon de la sphère passant par A $(1,2,3)$, B $(2,4,-5)$, C $(0,1,-6)$ et D $(-1,0,7)$.

2 Distance d'un point à un plan

On considère à nouveau les points A $(1,2,3)$, B $(2,4,-5)$, C $(0,1,-6)$ et D $(-1,0,7)$.
Quelle est la distance du point D au plan défini par A, B et C ?

3 Nature d'une application

Quelle est la nature de l'application dont la matrice dans une base orthonormée est

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & \sqrt{2}\\ 1 & -1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0\end{bmatrix}.$$

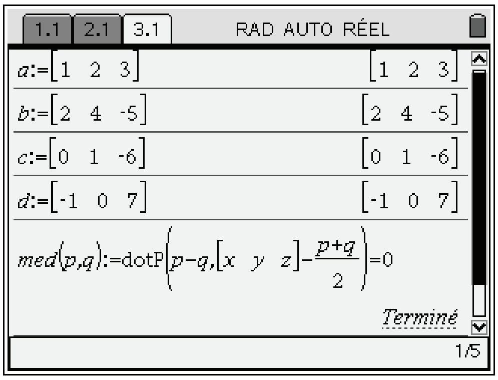
4 Un exercice d'oral

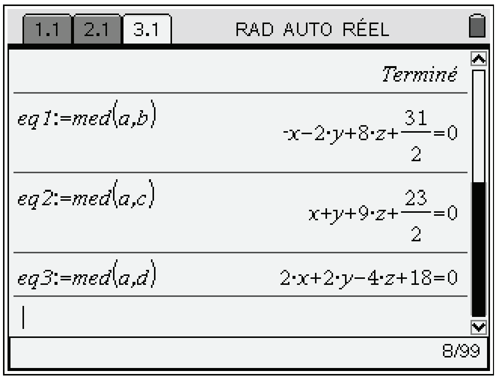
Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, avec $a>b>0$, F son foyer d'abscisse positive. Un point M parcourt l'ellipse. Déterminer le lieu du projeté orthogonal de F sur la tangente à $\mathcal{E}$ en M.

Solution des exercices

1 Détermination d'une sphère

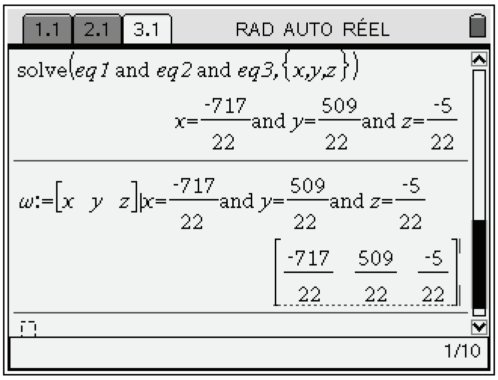
On définit tout d'abord les quatre points, puis la fonction permettant de déterminer l'équation du plan médiateur de deux points. On détermine alors les trois équations des plans médiateurs de (A,B), (A,C) et (A,D).

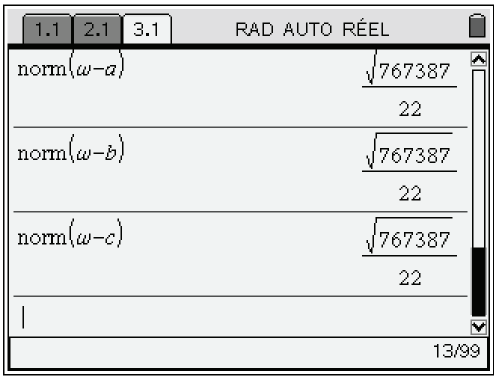




Il suffit de résoudre le système formé par ces trois équations.

On récupère ensuite les composantes du centre, puis on peut calculer le rayon à partir de la distance entre ce centre et l'un des points de la sphère.



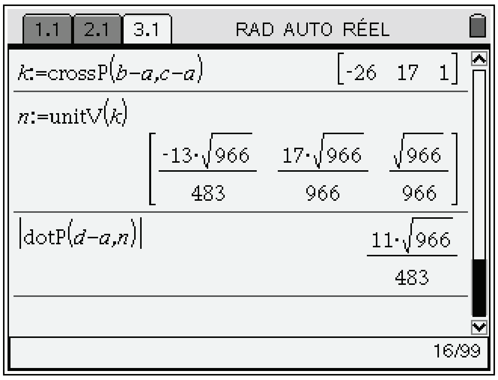


2 Distance d'un point à un plan

Les points A, B, C et D ont déjà été définis lors de la correction de l'exercice 1.

On obtient un vecteur normal au plan défini par A, B et C en calculant $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, on peut ensuite obtenir un vecteur normal unitaire $\vec{n}$ en normant ce vecteur.

Il suffit alors de calculer la valeur absolue du produit scalaire de $\overrightarrow{AD}$ et de $\vec{n}$ pour déterminer la distance recherchée.



3 Nature d'une application

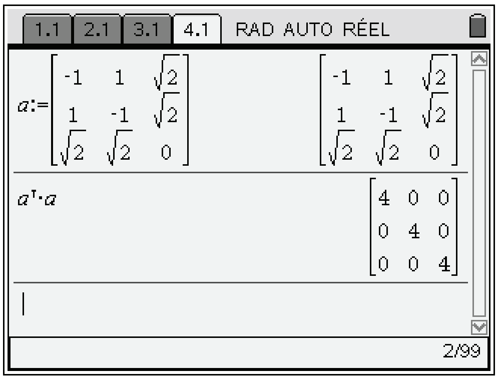
On peut vérifier que ${}^tA \cdot A = 4I$.

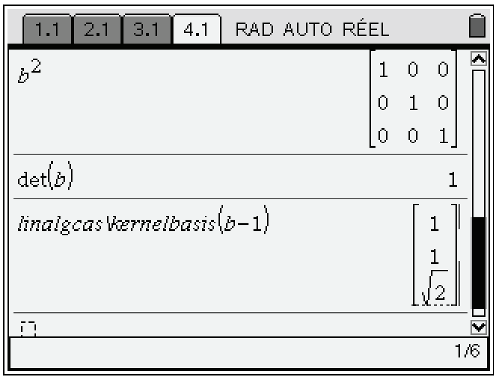
Si on pose $B = A/2$, on a ${}^tB \cdot B = I$. Cela montre que B est une matrice d'isométrie. De plus $\det(B) = 1$, ce qui montre que B est une rotation.

On a enfin ${}^tB = B$ et donc $B^2 = I$, ce qui montre que B est un retournement.

A est donc une similitude directe, composée d'une homothétie de rapport 2 et d'un retournement.

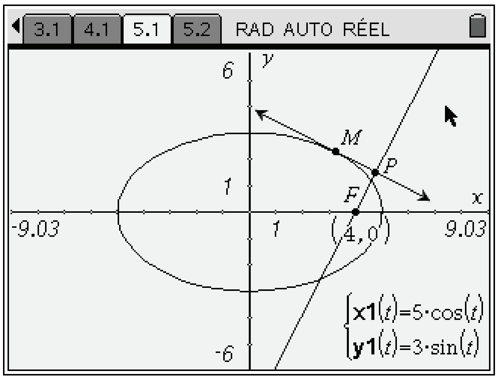
Pour déterminer l'axe de B, on peut étudier l'ensemble des vecteurs invariants de B en appliquant **linalgcas\kernelbasis** à la matrice $B - I$, ou obtenir une base de cette droite en calculant la somme entre un vecteur u et son image (sous réserve que cette somme soit non nulle). Dans le cas de $u = e_1(1,0,0)$, cette image est donnée par la première colonne de B.

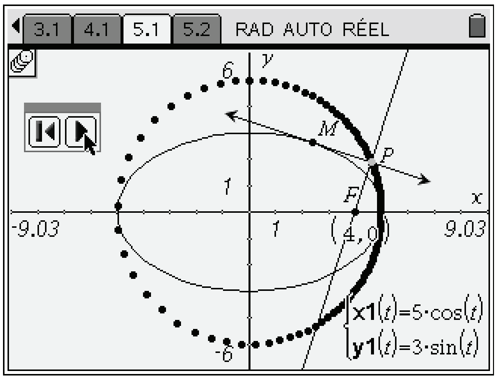




4 Un exercice d’oral

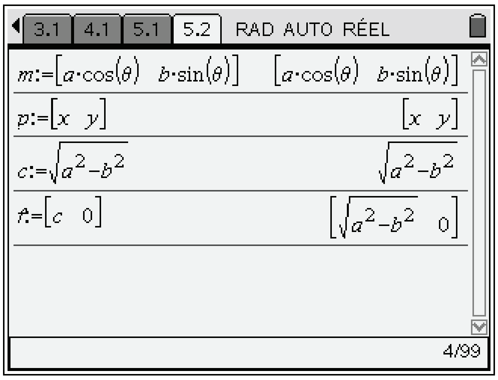
Une figure avec l’application Graphiques & géométrie permet d’avoir une idée du résultat. Prenons pour cela des valeurs pour a et b. La construction étant terminée, faisons parcourir au point M l’ellipse et déterminons la trace de P.





Le lieu de P semble être le cercle de centre l'origine et de rayon a : cercle principal de l'ellipse. Pour s'en persuader, il serait possible de collecter dans un tableau les distances de O à P, lorsque M varie et de voir qu'elles sont constantes. Nous allons le démontrer formellement dans l'application Calculs.

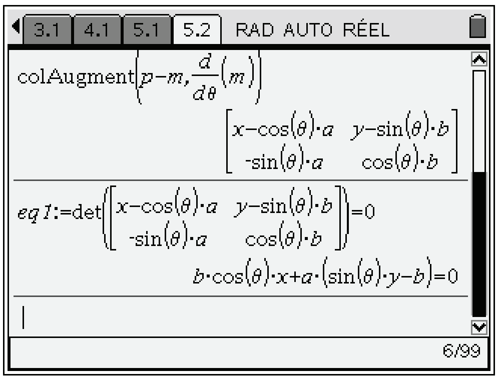
Après avoir créé une nouvelle page, dans un premier temps on entre les données :

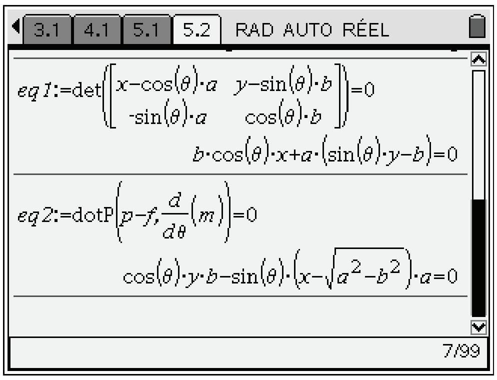


On écrit ensuite que les vecteurs $\overrightarrow{MP}$ et $\dfrac{dm}{d\theta}$, vecteur directeur de la tangente en M, sont colinéaires.

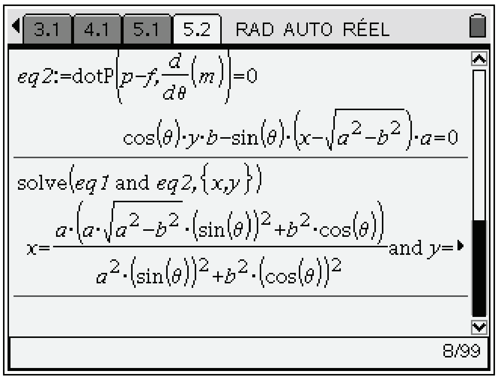
Pour cela on construit, à l'aide de la fonction **colAugment** (on travaille ici avec des vecteurs lignes), la matrice ayant ces deux vecteurs pour vecteurs lignes et on écrit que le déterminant est nul.

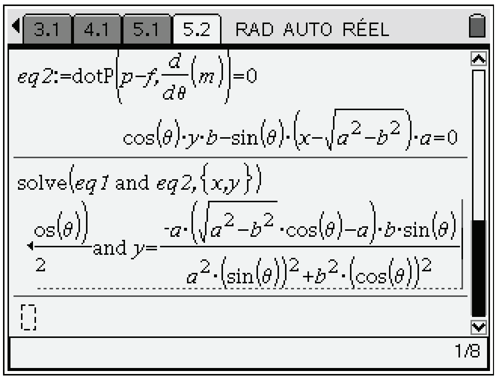
La deuxième équation est donnée en écrivant que les vecteurs $\overrightarrow{FP}$ et $\dfrac{dm}{d\theta}$ sont orthogonaux.





Il ne reste plus qu'à résoudre le système…





et à vérifier que les coordonnées de P sont bien solution de l'équation $x^2+y^2=a^2$, en tapant tout simplement :

x^2+y^2 | ans