Chapitre 2

Bien utiliser un outil de calcul formel

L'utilisation d'un outil de calcul formel, comme de tout autre outil un peu évolué, nécessite un certain apprentissage. Il est indispensable de prendre très rapidement conscience des particularités et des limites de l'utilisation d'un outil de ce type. La plus grande partie du contenu de ce chapitre n'est pas spécifique à l'utilisation de tel ou tel modèle de calculatrice, ou de logiciel de calcul formel.

1. Utilisation des calculatrices “classiques”

Avant d'aller plus loin dans l'étude des particularités d'utilisation d'un logiciel de calcul formel, il n'est peut-être pas inutile de rappeler que l'utilisation de n'importe quel outil de calcul, y compris purement numérique, peut causer des erreurs liées à la façon dont seront traitées les données.

1.1 *Erreur numérique lors d'un calcul isolé*

Pour commencer, une calculatrice numérique ne peut pas manipuler de nombres réels dont le développement décimal n'est pas limité à 12, 13 ou 14 décimales (suivant les modèles). De ce fait, des calculs simples comme $3\times(1/3)$ peuvent éventuellement conduire à des résultats inexacts.

En particulier, il ne faudra jamais tester l'égalité de deux nombres décimaux dans un programme, il est largement préférable d'utiliser un test pour voir si la valeur absolue de la différence de ces nombres est bien inférieure à une certaine valeur. Imaginons par exemple un programme chargé de résoudre les équations du second degré.
Typiquement, un tel programme va comporter un test sur les valeurs de delta.

Que va-t-il se passer avec l'équation $x^2+2\sqrt{2}x+2=0$?

Si l'on calcule un discriminant associé à une équation de ce type, suivant la calculatrice utilisée, il est tout à fait possible d'obtenir un résultat non nul, éventuellement négatif ! On va retrouver la même situation dans d'autres cas, comme par exemple pour l'étude de la colinéarité de deux vecteurs.

Certaines machines “trichent” un peu et arrondissent les résultats très petits... ce n'est bien sûr qu'une solution très approximative, et qui peut conduire à d'autres erreurs... (par exemple lorsque l'on étudie si une matrice est inversible à partir de la valeur de son déterminant...).

1.2 *Cumul d'erreurs*

Naturellement ce type d'erreur va avoir des conséquences encore plus importantes si l'on effectue des calculs en cascades, comme par exemple lors d'un calcul des valeurs des termes d'une suite définie par récurrence. Le résultat final est parfois totalement incorrect.

Un exemple classique est celui de la suite définie par $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ avec $u_0 = e - 1$.

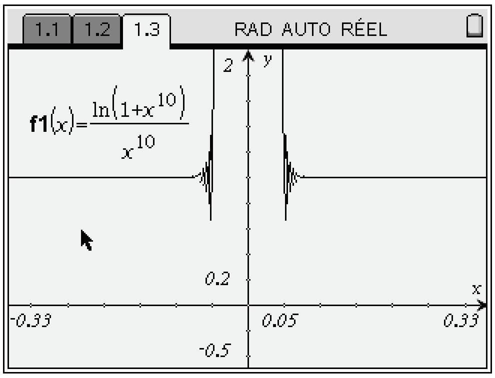
On peut montrer que cette suite possède une limite nulle, alors que l'on obtient des résultats totalement aberrants, et contradictoires d'un modèle de calculatrice à l'autre, lorsque l'on tente de faire un calcul numérique des termes de cette suite (lors du calcul de u_n, l'erreur précédente est multipliée par *n*... on obtient donc très rapidement des erreurs considérables...).

1.3 *Représentations graphiques chaotiques...*

On peut être tenté de prévoir la valeur d'une limite en utilisant sa calculatrice.

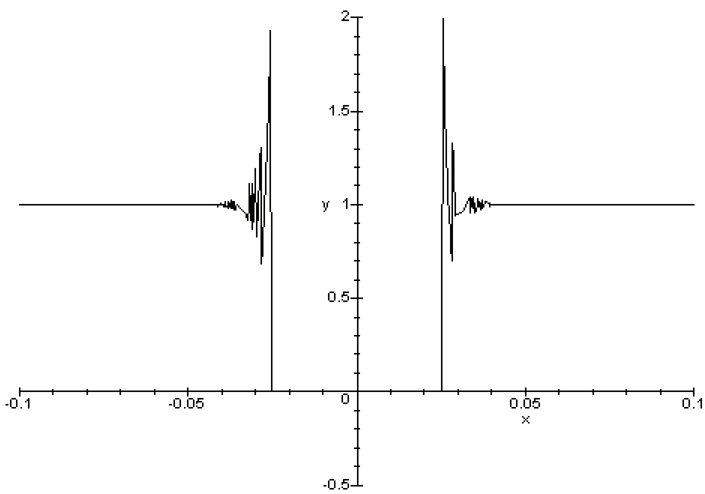
Considérons ainsi $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+x^{10}\right)}{x^{10}}$.

Quelle est la limite de cette fonction en 0 ? Nous savons qu'elle est égale à 1. Pourtant, la représentation graphique obtenue sur une calculatrice est assez surprenante :



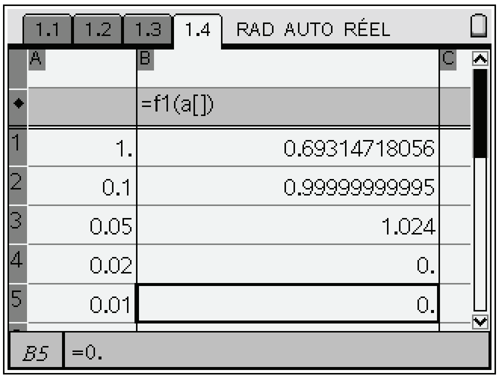
Il ne s'agit pas d'un « bug ». On obtient le même type de courbe sur tout autre logiciel (ici, Maple[1]) :

```
> plot(ln(1+x^10)/x^10,x=-0.1..0.1,y=-0.5..2,color=black);
```



[1] Maple est une marque déposée de Waterloo Maple Inc.

On peut compléter cette exploration par le calcul de quelques valeurs :



1.1 1.2 1.3 1.4 RAD AUTO RÉEL

	A	B	C
◆		=f1(a[])	
1	1.	0.69314718056	
2	0.1	0.99999999995	
3	0.05	1.024	
4	0.02	0.	
5	0.01	0.	

B5 =0.

Comment interpréter tout les valeurs nulles obtenues au voisinage de 0 ?

C'est facile si l'on sait par exemple que $1+10^{-14}$ sera arrondi à 1, que le logarithme de cette expression sera donc égal à 0, et que la division par 10^{-14} ne changera rien à cela !

2. La simplification des expressions

Un des problèmes que l'on rencontre très vite lorsque l'on manipule un logiciel de calcul formel, que ce soit sur une calculatrice ou un ordinateur, concerne la forme parfois inattendue d'un résultat, qui, bien que correct, n'est pas exprimé sous la "forme simplifiée" à laquelle on s'attendait. Il faut absolument comprendre qu'il est bien difficile lorsque l'on fait des calculs sur des expressions symboliques de définir ce qu'est la forme simplifiée d'une expression.

La plus simple à utiliser… pourrait-on être tenté de répondre.

Commençons par un exemple simple, lié à l'étude des fonctions polynômes. Lorsqu'il s'agit de calculer les valeurs d'un polynôme en un point, on peut convenir que la forme simplifiée est la forme qui nécessite un minimum d'opérations.

Par exemple, pour calculer les valeurs du polynôme

$$p(x)=243x^5+405x^4+270x^3+90x^2+15x+1$$

c'est-à-dire de

$$p(x)=243\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x+405\cdot x\cdot x\cdot x\cdot x+270\cdot x\cdot x\cdot x+90\cdot x\cdot x+15\cdot x+1$$

on doit, a priori, effectuer 15 multiplications et 5 additions.

Une idée classique consiste à utiliser une forme équivalente de l'expression, mais moins coûteuse lors que l'on souhaite effectuer des calculs. La méthode de Hörner consiste à écrire ce polynôme sous la forme :

$$p(x)=1+\Big(15+\Big(90+\big(270+\big(405+243\cdot x\big)\cdot x\big)\cdot x\Big)\cdot x\Big)\cdot x$$

Il ne faut pas se laisser abuser par la présence de nombreuses parenthèses. Cette expression est effectivement moins coûteuse en calculs que l'expression initiale du polynôme. Il suffit maintenant de calculer 5 produits et 5 sommes.

Dans ce cas particulier, une bien meilleure méthode consiste à factoriser ce polynôme :

$$p(x)=(3x+1)^5$$

Cette factorisation est également particulièrement intéressante si l'on veut résoudre l'équation $p(x)=0$ ou encore obtenir une forme simplifiée de la fonction dérivée.

Faut-il pour autant en déduire que l'on doit systématiquement rechercher une forme factorisée lorsque l'on a besoin de faire des calculs de ce type avec des fonctions polynômes ?

Il suffit de prendre par exemple le polynôme défini par

$$q(x)=x^5-32$$

pour se convaincre du contraire. La forme factorisée (à coefficients entiers) est

$$q(x)=(x-2)\left(x^4+2x^3+4x^2+8x+16\right)$$

et on ne peut pas dire qu'elle soit beaucoup plus efficace lorsqu'il s'agit de calculer des valeurs, ni même pour une étude de signe, où il est plus simple d'utiliser la monotonie de $x \mapsto x^5$ que d'étudier le signe du produit

$$(x-2)\left(x^4+2x^3+4x^2+8x+16\right)$$

Cet exemple illustre bien la difficulté que pose l'écriture d'un logiciel de calcul formel… il n'existe bien souvent pas de méthode optimale, utilisable avec toute une catégorie d'objets, et apte à résoudre dans les meilleures conditions possibles un problème donné.

En ce qui concerne la simplification des expressions, deux types d'attitude sont possibles.

- Laisser à l'utilisateur un contrôle complet des simplifications à effectuer.
- Choisir de proposer systématiquement une forme simplifiée relativement optimale.

Maple, par exemple, laisse un contrôle total à l'utilisateur qui peut décider d'utiliser telle ou telle règle de simplification, tout en en ignorant d'autres.

```
> q:=(cos(x)^2+sin(x)^2)/(ln(4)-2*ln(2)+1);
```

$$q := \frac{\cos(x)^2+\sin(x)^2}{\ln(4)-2\ln(2)+1}$$

```
> simplify(q,trig);
```

$$\frac{1}{\ln(4)-2\ln(2)+1}$$

```
> simplify(q,ln);
```

$$\cos(x)^2+\sin(x)^2$$

```
> simplify(q);
```

$$1$$

Séduisant... Mais considérons à présent l'expression

$$A=\frac{32}{5}\frac{\sqrt{5}}{\left(-1+\sqrt{5}\right)^5}+\frac{32}{5}\frac{\sqrt{5}}{\left(1+\sqrt{5}\right)^5}$$

obtenue lors du calcul du quatrième terme de la suite de Fibonacci en utilisant les méthodes classiques de calcul des termes d'une suite récurrente double.

Nous savons que les termes de cette suite définie par

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$$

$$u_0=u_1=1$$

sont tous des entiers, ce qui est loin d'être évident avec l'expression précédente.

Il existe donc une forme plus simple de cette expression, que l'on peut d'ailleurs obtenir très simplement en calculant les premiers termes de la suite.

Voyons comment cette simplification peut être conduite avec Maple.

```
> a:=(32/5)*sqrt(5)/(-1+sqrt(5))^5+(32/5)*sqrt(5)/(1+sqrt(5))^5;
```

$$a := \frac{32}{5}\,\frac{\sqrt{5}}{(-1+\sqrt{5})^5} + \frac{32}{5}\,\frac{\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})^5}$$

```
> simplify(a);
```

$$\frac{5120}{(-1+\sqrt{5})^5\,(1+\sqrt{5})^5}$$

```
> normal(a,expanded);
```

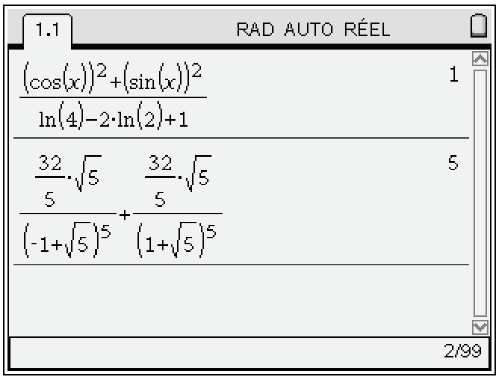
$$5$$

```
> radsimp(a,ratdenom);
```

$$5$$

Cette fois l'utilisation de la fonction **simplify** n'a pas été suffisante, et l'on a dû utiliser des fonctions de mise en forme plus élaborées (**normal** ou **radsimp** dans cet exemple), avec les options appropriées pour parvenir au résultat souhaité.

À l'inverse, la TI-Nspire CAS vise à assurer un maximum de facilité à son utilisateur. C'est pourquoi certaines simplifications seront automatiquement effectuées, comme on peut le voir sur les écrans suivants qui reprennent nos deux exemples précédents.



Il est bien évident que l'on gagne énormément en simplicité d'utilisation, mais il faut bien voir que l'on perd, en revanche, toute possibilité de simplification partielle.

3. Les risques de la simplification automatique…

Nous avons déjà vu que la notion de forme simplifiée d'une expression est souvent très dépendante du contexte, et de la suite que l'on souhaite donner aux différents calculs. Nous allons aborder ici le problème de la validité de ces simplifications, et des conséquences que cela peut avoir dans la suite des calculs.

Prenons par exemple le cas des fractions rationnelles. On peut les laisser telles qu'elles ont été saisies, ou au contraire choisir de les simplifier de manière automatique.

Par exemple, Maple ne fait ces simplifications qu'à la demande :

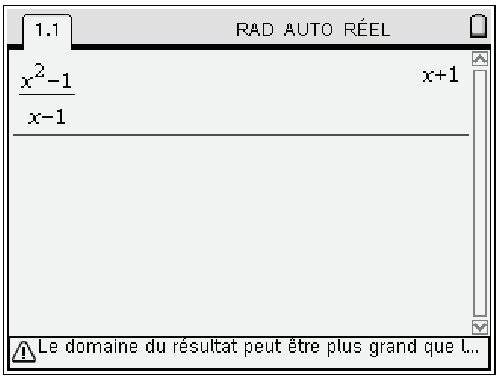
```
> (x^2-1)/(x-1);
```

$$\frac{x^2-1}{x-1}$$

```
> simplify(");
```

$$x+1$$

En revanche, la TI-Nspire CAS va automatiquement réaliser ce type de simplifications :



☞ *Noter l'affichage du message en bas de l'écran. L'expression simplifiée n'a effectivement pas le même ensemble de définition que l'expression initiale (celle-ci n'est pas définie en* 1*)*

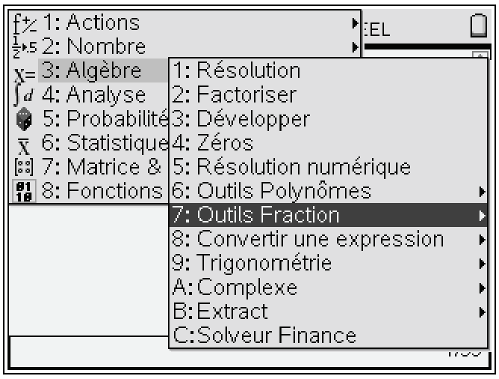
Ce deuxième choix va généralement permettre d'obtenir des résultats sous une forme plus utilisable, mais il faut être conscient que cela va également avoir des conséquences dans certains cas. Prenons l'exemple de la recherche du numérateur d'une fonction.

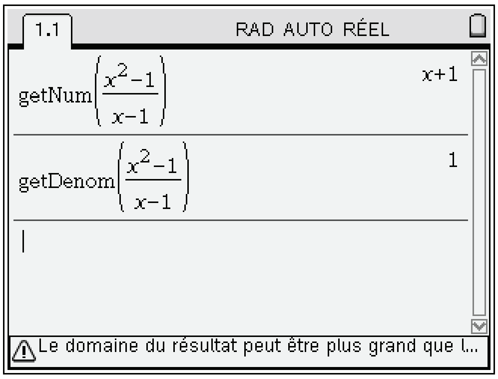
Avec Maple, on doit utiliser la fonction **numer** :

```
> numer((x^2-1)/(x-1));
```

$$x^2-1$$

Que se passe-t-il avec une TI-Nspire CAS si l'on souhaite effectuer le même calcul ?





Pour comprendre ce résultat, on doit savoir que la TI-Nspire CAS commence toujours par simplifier les fractions rationnelles. Lors de l'évaluation de l'expression

$$\text{getdenum}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$$

on commence par simplifier le quotient $\dfrac{x^2-1}{x-1}$, ce qui conduit à $x+1$, puis on recherche le numérateur de cette expression.

Dans cet exemple, il était facile de prévoir cette situation. Il existe néanmoins des cas où l'on peut obtenir un résultat faux ou incomplet alors que le problème étudié ne faisait pas, a priori, intervenir des fractions rationnelles. Considérons par exemple le système

$$\begin{cases} mx+y=1 \\ x+my=1 \end{cases}$$

Un système de calcul formel utilisant les formules de Cramer, sans se soucier de leur validité, va obtenir

$$x=y=\frac{m-1}{m^2-1}=\frac{1}{m+1}.$$

L'utilisateur risque alors de croire que ce résultat est valable pour toutes les valeurs de m autres que -1, et penser qu'il y a une solution unique $x=y=\dfrac{1}{2}$ pour $m=1$. Ce qui est totalement faux.

Cette absence de prise en compte des cas particuliers est une caractéristique essentielle des logiciels de calcul formel les plus courants.

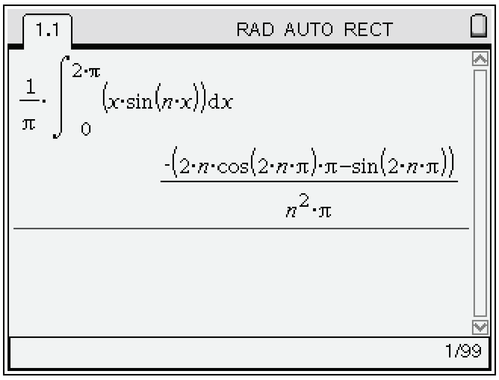
4. Le domaine utilisé pour les calculs

4.1 *Calcul avec des entiers*

Quelle est la valeur de $(-1)^{2n}$ ou encore de $\sin(n\pi)$?
À vrai dire, on n'a pas vraiment besoin d'un logiciel de calcul formel pour répondre à ces questions !

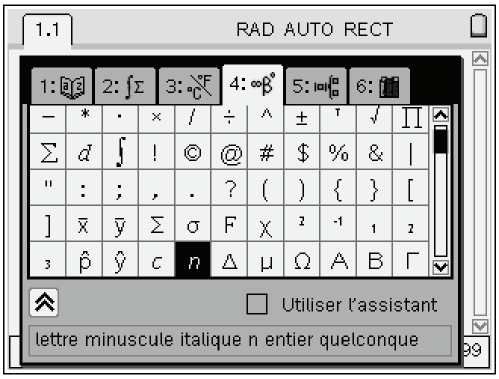
Il est indispensable de savoir ce qui va se passer pour comprendre la « non-simplification » apparente de certains résultats.

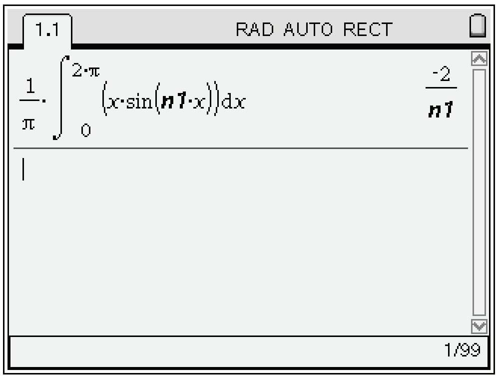
Voici par exemple un calcul d'intégrale qui peut intervenir lors de l'étude des séries de Fourier :



On peut être déçu par la forme du résultat… Le logiciel semble ne pas « savoir » que $\cos(2n\pi)=1$ et que $\sin(2n\pi)=0$. En fait, cela est parfaitement normal dans la mesure où ce logiciel « ne sait pas » non plus que n est un entier ! On retrouverait le même type de résultat sur tout autre logiciel de calcul formel.

Sur la TI-Nspire CAS, on utilisera une variable reconnue par le système comme désignant un entier quelconque :





☞ *On trouvera le caractère* ***n*** *dans l'onglet 4 du catalogue, ou dans la table des symboles accessibles par* ctrl*. Les variables* ***n*0**, ***n*1**...***n*255** *sont toutes considérées comme désignant des entiers arbitraires.*

4.2 *Calcul dans l'ensemble des nombres complexes*

Tous les logiciels de calcul formel travaillent a priori dans l'ensemble des nombres complexes, ce qui peut poser quelques problèmes...

Considérons par exemple une fonction comme

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$$

Peut-on calculer la valeur de cette fonction au point $x=-3$? La réponse est bien évidemment non, si l'on pense à un calcul dans l'ensemble des nombres réels. Le problème, c'est que la notation $\sqrt{x}$ peut avoir également un sens dans l'ensemble des nombres complexes, et désigner le nombre *a*, nul si $x=0$ ou tel que

- $|a|=\sqrt{|x|}$
- $\arg(a)=\alpha\ [2\pi]$ avec $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ et $2\alpha=\arg(x)\ [2\pi]$

pour $x\neq 0$.

Cette nouvelle fonction vérifie bien $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$ mais elle ne possède pas les mêmes propriétés que la fonction racine carrée classiquement définie dans l'ensemble des nombres positifs. Par exemple, avec *x* et *y* complexes quelconques, les égalités

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

ou encore

$$\sqrt{x\,y}=\sqrt{x}\sqrt{y}$$

ne sont plus vérifiées ! C'est d'ailleurs pour cela que certains mathématiciens avaient décidé d'exclure la notation $\sqrt{-1}$. (Pour éviter des calculs du type $-1=\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{1}=1$???).

Il est de la même façon tout à fait possible de définir le logarithme d'un complexe, ou encore l'arcsinus d'un nombre supérieur à 1… Revenons au calcul de

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$$

au point $x=-3$ … Si l'on se place dans l'ensemble des nombres complexes, on aura

$$f(-3)=\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-5}}=\frac{i\sqrt{4}}{i\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Le résultat final, parfaitement réel, ne laisse pas entrevoir la nature complexe des calculs intermédiaires. Ce n'est absolument pas une anomalie, et c'est bien dans cet esprit qu'avaient été introduits les complexes (par exemple pour pouvoir faire certains calculs intermédiaires lors de la résolution d'une équation du troisième degré… tout en recherchant des solutions qui seraient parfaitement réelles).

Le problème réside seulement dans le risque de confusion que peut faire l'utilisateur du fait de la similitude de notation entre des fonctions purement réelles, définies sur des intervalles bien particuliers, et ces fonctions de la variable complexe. Cette situation est dans une certaine mesure aggravée sur des calculatrices offrant le choix du mode de fonctionnement réel ou complexe. Ainsi, en mode réel, la TI-Nspire CAS s'interdit seulement d'afficher un résultat final complexe lorsque l'on traite un problème réel, mais que cela ne signifie pas que tous les calculs intermédiaires ont été faits dans l'ensemble des réels. En conséquence, on risque d'obtenir des résultats incorrects lors de l'utilisation des fonctions racine carrée, logarithme, ou encore trigonométriques inverses lorsque celles-ci ne sont pas utilisées sur leur ensemble de définition.

L'autre problème concerne l'absence d'utilisation, ou au contraire l'utilisation systématique, de certaines règles de calcul spécifiques aux seuls nombres réels, lorsque l'on utilise des fonctions comme la conjugaison, la partie réelle, ou encore la partie imaginaire…
Quelle est la forme simplifiée de $\mathrm{Re}(x+iy)$? Voici la réponse de Maple :

```
> Re(x+I*y);
```

$$\Re(x+Iy)$$

```
> simplify(");
```

$$\Re(x+Iy)$$

```
> simplify(",assume=real);
```

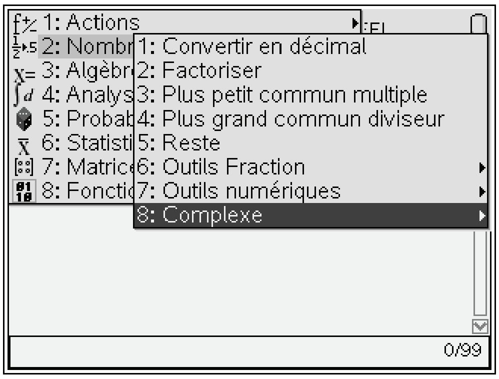
$$x$$

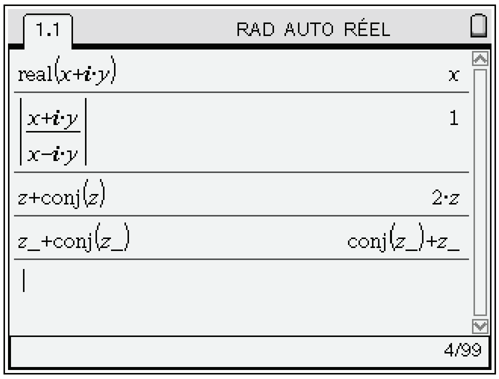
Maple considère par défaut que les variables qu'il rencontre sont complexes. Ce n'est que lorsque l'on indique explicitement que les variables manipulées sont des réels que l'on obtient une simplification de l'expression.

Les concepteurs de la TI-Nspire CAS ont choisi un point de vue différent.
Par défaut, toutes les variables symboliques non affectées sont réelles.

Cela permet d'obtenir directement la simplification d'expressions comme $\mathrm{Re}(x+iy)$ ou encore $\left|\frac{x+iy}{x-iy}\right|$.

Sur une TI-Nspire CAS, pour manipuler une variable symbolique complexe, et éviter l'utilisation de règles de simplification spécifiques aux variables réelles, il faut lui donner un nom se terminant par le caractère _ (que l'on obtient avec ctrl ␣ sur l'unité nomade) qui indique la nature particulière de cette variable.





☞ *Dans le 3ième calcul, la variable a été considérée comme étant réelle, et donc égale à son conjugué… Ce n'est pas le cas dans le 4ième, grâce à la présence du tiret bas à la fin du nom.*

Il faut enfin savoir que certaines fonctions ne donneront pas la même valeur, suivant que l'on est en mode réel ou complexe. Calculons la racine cubique de -8 avec Maple :

```
> (-8)^(1/3);
```

$$(-8)^{1/3}$$

```
> simplify(");
```

$$1+I\sqrt{3}$$

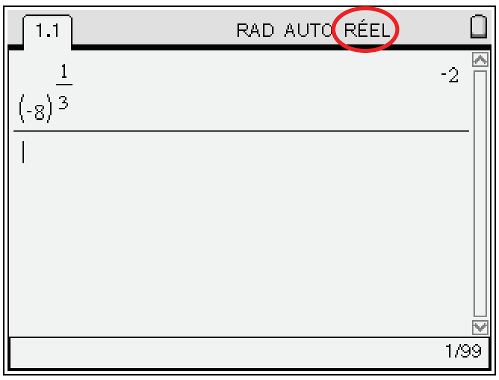
Un peu surprenant, mais pourtant tout à fait prévisible si l'on sait que Maple travaille dans l'ensemble des complexes. Pour calculer le module du résultat, on prend la racine cubique au sens usuel du module de -8, c'est à dire de 8, et on obtient $r=2$.

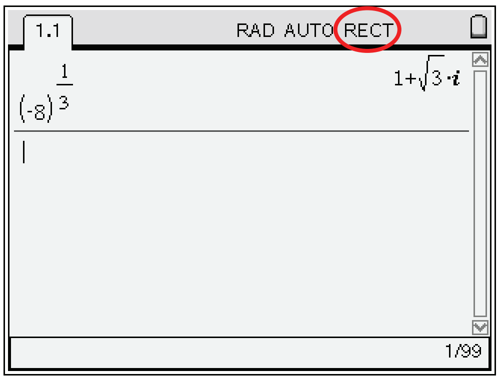
Pour calculer l'argument, on utilise la valeur de l'argument du nombre -8 contenue dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$.

On divise ensuite cette valeur par 3. On obtient ainsi $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

D'où $z=2e^{i\pi/3}=2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$.

Sur une TI-Nspire CAS, on obtiendra la valeur "habituelle", c'est à dire -2 lorsque l'on est en mode réel mais on retrouvera la valeur donnée par Maple lorsque l'on est en mode complexe (rectangulaire ou polaire).





5. La comparaison de deux expressions

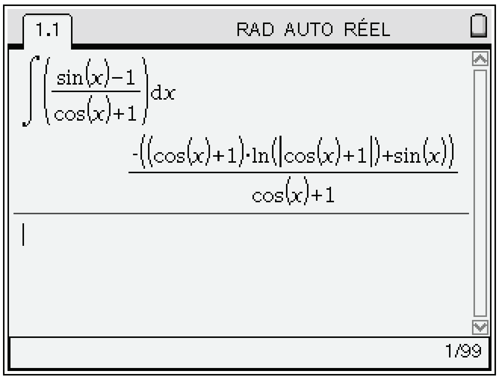
Nous allons maintenant rechercher une primitive de $f(x)=\dfrac{\sin(x)-1}{\cos(x)+1}$.

Avec Maple, on obtient $\int f(x)dx=-\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)+\ln\left(1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$.

```
> int((sin(x)-1)/(cos(x)+1),x);
```

$$-\tan\left(\frac{1}{2}x\right)+\ln\left(1+\tan\left(\frac{1}{2}x\right)^2\right)$$

Voici le résultat obtenu avec une TI-Nspire CAS, placée en mode réel :



Les deux résultats sont suffisamment éloignés pour dérouter plus d'un utilisateur.
Si l'on n'a pas en tête l'existence de formules permettant d'exprimer $\cos(x)$ en fonction de $\tan(x/2)$, on risque d'avoir quelques difficultés à trouver un lien entre ces deux expressions. Il existe de plus des cas où ce type de comparaison sera beaucoup plus difficile, comme par exemple lors de la résolution d'équations différentielles faisant intervenir des constantes d'intégration, ou même parfois dans la simple expression de racines d'une équation polynomiale faisant intervenir des racines carrées imbriquées.

En particulier, il est donc totalement utopique de penser qu'il toujours facile de *vérifier* un résultat obtenu à partir d'un calcul manuel à l'aide de votre calculatrice.

En fait, il n'existe que quelques cas dans lesquels on est absolument assuré de pouvoir vérifier si deux expressions sont identiques ou non. C'est en particulier vrai pour les expressions polynomiales (qu'il suffit de développer) ainsi que pour les polynômes trigonométriques (que l'on pourra linéariser[2] totalement).

Dans de nombreuses autres situations, il ne restera guère que la possibilité de comparer numériquement les expressions obtenues...

[2] Cette linéarisation s'obtient avec la fonction **tcollect** sur la TI-Nspire CAS, ou en utilisant la fonction **combine** avec l'option **trig** avec Maple.

6. L'explosion de la complexité des calculs…

C'est un point sur lequel il faut être particulièrement vigilant, en particulier lors de l'écriture de programmes… Lorsque l'on exécute un algorithme comportant par exemple une boucle avec une centaine d'itérations sur un outil de calcul numérique, on peut prévoir quel sera le temps nécessaire pour effectuer cette série de calculs. Sur les outils actuels, ce temps sera généralement toujours très faible, quelque soit les nombres que l'on fournira à cet algorithme.

Aucune difficulté par exemple pour calculer la valeur numérique des 100 premiers termes de la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n + 1}$ et $u_0 = 1$.

En revanche, l'exécution d'un « simple » programme de calcul de ce type peut mettre en difficulté un système de calcul formel. Pour comprendre pourquoi, il suffit de demander les valeurs des premiers termes de la suite. Voici ce que l'on obtient en mode numérique :

1.732050808
2.394170171
3.020963585
3.625904655
4.215814184

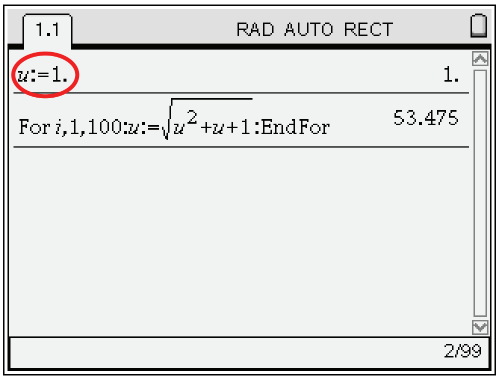
Mais voici les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 obtenues avec un outil de calcul formel :

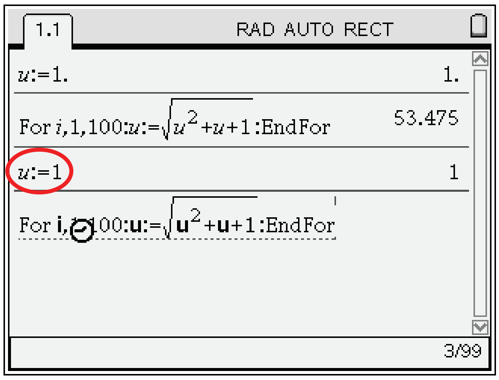
$$\sqrt{3}$$
$$\sqrt{4+\sqrt{3}}$$
$$\sqrt{5+\sqrt{3}+\sqrt{4+\sqrt{3}}}$$
$$\sqrt{6+\sqrt{3}+\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{5+\sqrt{3}+\sqrt{4+\sqrt{3}}}}$$
$$\sqrt{7+\sqrt{3}+\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{5+\sqrt{3}+\sqrt{4+\sqrt{3}}}+\sqrt{6+\sqrt{3}+\sqrt{4+\sqrt{3}}+\sqrt{5+\sqrt{3}+\sqrt{4+\sqrt{3}}}}}$$

Quand on voit la complexité du terme u_5, on imagine facilement la difficulté qu'il y aurait à calculer (et surtout à tenter de simplifier) le terme u_{100}…

Dans le cas présent, il est probable que c'est effectivement une valeur numérique de u_{100} qui nous intéresse. Pour l'obtenir, il suffit d'initialiser la suite avec une valeur décimale, et non avec une valeur entière. C'est ce qui est fait, avec succès dans le premier écran ci-dessous (à gauche).

En revanche, dans l'écran de droite, on a lancé le calcul avec une valeur initiale entière 1 (pas de point décimal après le 1), et tous les calculs sont alors faits par défaut de manière exacte…
Il est alors impossible d'obtenir un résultat, même après plusieurs minutes de calculs !





☞ *Pour interrompre le calcul dans la situation de droite, on peut appuyer sur la touche* off/on.