Stage découverte de l'univers Nspire	Orthocentre et hyperbole

Mots-clés : géométrie, orthocentre, hauteur, produit scalaire.

Fichier associé : orthocentre.tns

1. Objectifs

Guider la correction d'un exercice complet sur une notion clé du programme. La partie expérimentation sert de bilan aux diverses observations réalisées par les élèves et la vérification de la robustesse des conjectures émises. Celles-ci sont alors démontrées à l'aide de la TI-Nspire.

2. Énonce

Le texte suivant est adapté de l'épreuve pratique de mathématique, sujet 093*, de* 2008.

(H) est l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$.

A, B et C sont trois points distincts de (H).
On note K l'orthocentre du triangle ABC et (T) le cercle circonscrit au triangle ABC ; son centre est le point E. Le point D est le symétrique du point K par rapport à O, l'origine du repère.
1) Construire une figure adaptée au problème.
2) Émettre des conjectures quant aux positions des points K et D en fonction de la position des points A, B et C.
3) Démontrer la conjecture relative au point K.

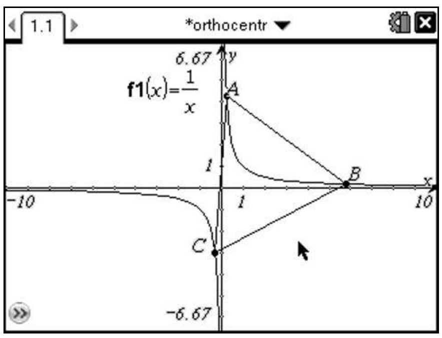
3. Commentaires

Cet exercice est directement inspiré de l'expérimentation liée à l'épreuve pratique de mathématiques de 2008. Elle est tout à fait adaptée au niveau de première S. Le calcul formel est un moyen de preuve très efficace en pareil cas.
La construction de la figure peut être passée sous silence selon le niveau d'expertise des utilisateurs ou si l'on veut simplement faire une mise en commun de ce qui a été observé sans revenir sur la construction en elle-même.

Une construction possible
Dans un nouveau classeur ajouter une page **Graphiques**. Définir le point O (menu 7 1).

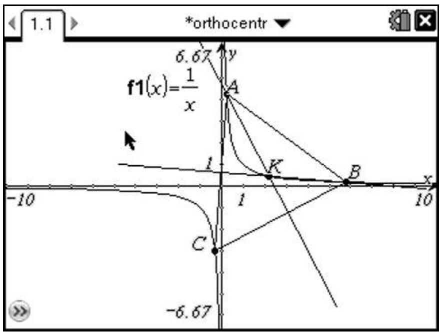
- Tracer l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$.

Placer le point A sur l'hyperbole avec la fonction **Point sur** (menu 7 2 puis cliquer sur la courbe pour la sélectionner et enfin positionner le point) et le nommer immédiatement. Placer de même B et C.
Supprimer l'affichage des coordonnées des points (menu 1 3 et cliquer tour à tour sur les données à cacher).
Tracer le triangle ABC (menu 9 2).



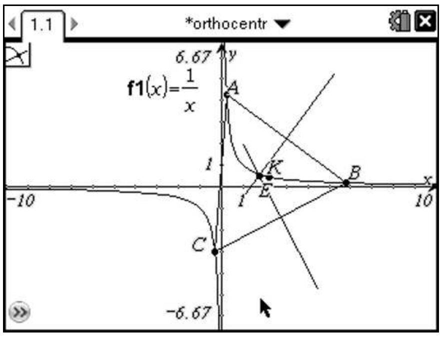
- Construction de l’orthocentre

Tracer la droite perpendiculaire à (BC) passant par A (menu A 1 puis cliquer sur le segment [BC] et sur le point A).
Faire de même pour la hauteur issue de B. Définir leur point d’intersection K (menu 7 3 et cliquer tour à tour sur chaque hauteur).
Cacher les hauteurs.



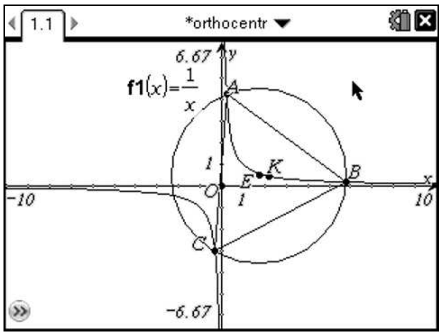
- Construction du cercle circonscrit

Tracer les médiatrices des segments [AB] et [BC] (menu A 3) et définir leur point d’intersection E.



Cacher les médiatrices.

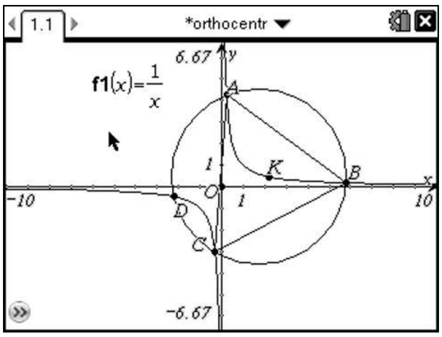
Tracer le cercle circonscrit au triangle ABC (menu cliquer sur le centre E puis sur un des sommets).



Le centre du cercle peut être caché.

- Construction du point D

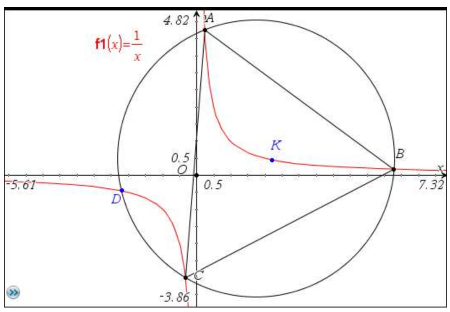
Utiliser le menu **Transformations** (menu B 1 et cliquer sur O puis sur K).



4. Conduite de l’activité

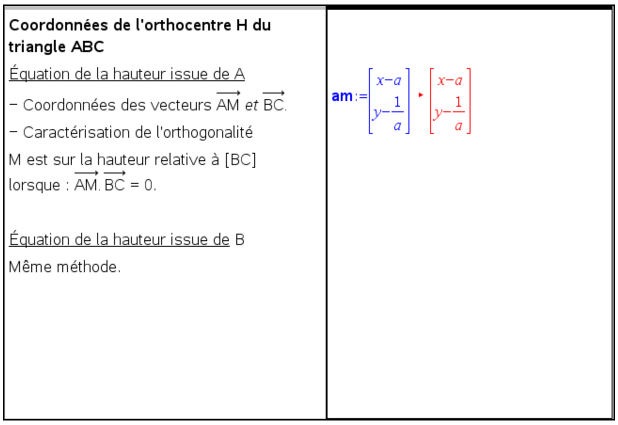
La figure est projetée à l’écran.

Les conjectures relevées sont vérifiées en déplaçant les points A, B et C.



Preuve

Ouvrir une page **Éditeur mathématique**, la partager et mettre une seconde page **Éditeur mathématique** à droite.
Recherche des coordonnées de H, point d'intersection des hauteurs issues de A et B.

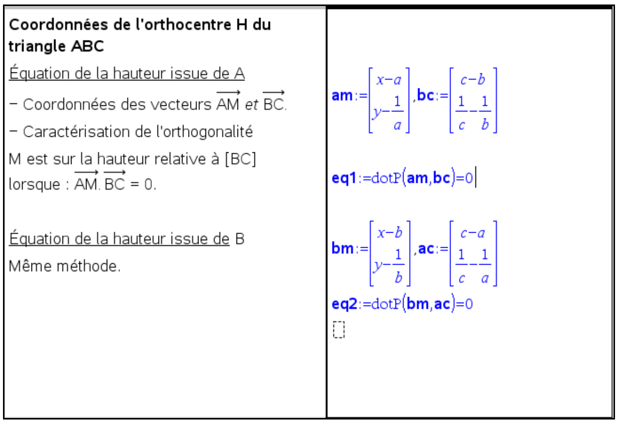


-Définition des vecteurs orthogonaux

Pour définir $\overrightarrow{AM}$, insérer une boite mathématique ((menu)(3)(1)) dans laquelle saisir **am :=** $\begin{bmatrix} x-a \\ y-1/a \end{bmatrix}$.

Améliorer l'affichage : une fois positionné dans la boîte, (menu)(5)(1) et choisir masquer le résultat.

Procéder de même pour définir le vecteur $\overrightarrow{BC}$ de coordonnées $\begin{bmatrix} c-b \\ 1/c-1/b \end{bmatrix}$.

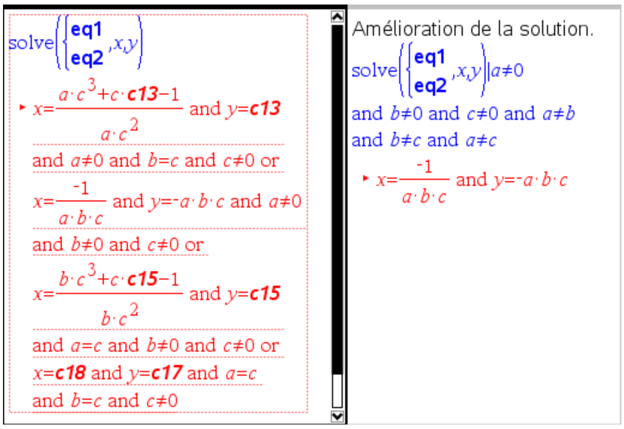


- Traduire l'orthogonalité dans une boîte mathématique par l'équation **eq1 := dotP(am,bc)=0** (**dotP** traduit le produit scalaire).
Masquer le résultat.

- Recommencer avec les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{AC}$ pour définir la seconde équation.

Résolution du système d'équations

eq1 et eq2 sont donc les deux équations que vérifient les coordonnées du point H.
Pour résoudre le système, utiliser l'instruction **solve** dans une boîte mathématique.



La solution est très complexe mais, en l'analysant, on remarque que beaucoup de conditions sont relatives à la non nullité de **a**, **b** ou **c** et au caractère distinct de ces nombres qui sont acquises par définition des points A, B ou C.
D'où l'idée de résoudre avec les conditions a, b, c non nuls et distincts 2 à 2.

x et y sont inverses l'un de l'autre.
Le point K est donc bien sur l'hyperbole.